MAT

PRÉ-VESTIBULAR
MATEMÁTICA

4

Sumário

Frente 1

Frente 2

Frente 3

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1
1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1
1 12 66 220 495 792 924 792 495 220 66 12 1
1 13 78 286 715 1287 1716 1716 1287 715 286 78 13 1
1 14 91 364 1001 2002 3003 3432 3003 2002 1001 364 91 14 1
1 15 105 455 1365 3003 5005 6435 6435 5005 3003 1365 455 105 15 1
1 16 120 560 1820 4368 8008 11440 12870 11440 8008 4368 1820 560 120 16 1

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^{n-k} \cdot y^k,\ x \text{ e } y \in \mathbb{C} \text{ e } n \in \mathbb{N}$$

$$\binom{n}{a} = \binom{n}{b} \rightarrow a = b \text{ ou } a + b = n$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$$

$$\binom{n}{a-1} + \binom{n}{a} = \binom{n+1}{a}$$

CAPÍTULO

13

Números binomiais, triângulo de Pascal e binômio de Newton

Estudada por diversos matemáticos, a figura triangular da abertura deste capítulo é uma ferramenta muito antiga, com registros de diagramas similares datados entre os séculos X e XI, encontrados na Pérsia e na China. Ela recebeu muitos nomes ao longo do tempo, mas atualmente é conhecida como triângulo aritmético, triângulo de Tartaglia ou, mais comumente, triângulo de Pascal.

Apesar de não ter definido esse triângulo, Blaise Pascal foi quem mais contribuições deixou com seus estudos sobre o assunto, facilitando, por exemplo, o trabalho de Newton no desenvolvimento das potências de binômios.

Definição

Dados dois números inteiros não negativos, *n* e *p*, $n \geq p$, chamamos de **número binomial** *n* sobre *p* o número:

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Portanto, temos que $\binom{n}{p} = C_{n;\,p}$, com as definições especiais: $\binom{n}{0} = 1,\ n > 0$ e $\binom{0}{0} = 1$.

Exemplo 1:

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = 6;\ \binom{7}{0} = 1;\ \binom{6}{4} = 15$$

Uma relação fundamental para os números binomiais é a igualdade entre números complementares:

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n\quad p}$$

Essa propriedade é consequência direta da definição.

Exemplo 2:

$$\binom{7}{1} = \binom{7}{6} \qquad \binom{8}{3} = \binom{8}{5} \qquad \binom{6}{0} = \binom{6}{6}$$

A partir de agora, vamos estudar as principais propriedades e alguns problemas relativos a esses números.

Triângulo de Pascal

Vamos construir uma tabela com os números binomiais $\binom{i}{j}$, colocando-os como nas matrizes: **j** será o número da **coluna** e **i** será o número da **linha**.

A tabela formada será diferente de uma matriz em três aspectos:

- a existência da **linha zero** e da **coluna zero**;
- **i** e **j** podem ser arbitrariamente grandes;
- como **i ≥ j**, a tabela é **triangular**.

A essa tabela damos o nome de **triângulo de Pascal**; é por meio dela que discutiremos algumas propriedades importantes dos números binomiais.

$$\begin{array}{ccccc}
\binom{0}{0} & & & & \\
\binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & \\
\binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & \\
\binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

Desenvolvendo os binomiais, observamos:

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & & & & & & \\
1 & 1 & & & & & \\
1 & 2 & 1 & & & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & & & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & \\
1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

Pela observação do triângulo de Pascal em sua forma numérica, podemos notar algumas propriedades, que serão discutidas a seguir.

Sequências binomiais

Chamamos de **sequência binomial** a toda sequência finita composta por todos os elementos de uma linha do triângulo de Pascal, na ordem em que aparecem no triângulo.

Assim, podemos dizer que o triângulo de Pascal é uma enumeração de todas as sequências binomiais possíveis. Para essas sequências:

a) prova-se que são simétricas, ou seja, termos equidistantes dos extremos são iguais (**binomiais complementares**);

b) considere:

$$\binom{n}{0}\binom{n}{1}\binom{n}{2}\dots\binom{n}{n\quad 1}\binom{n}{n}$$

Prova-se que, se **n** é par, o termo central da sequência é máximo, a sequência é crescente do 1º termo até o máximo e decrescente daí até o final.

Se **n** é ímpar, os dois termos médios são máximos, a sequência é crescente até eles e decrescente deles em diante.

Exemplo 3:

$$\begin{array}{cccccccl}
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & & (n=5) \\
1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 & (n=6)
\end{array}$$

Daí podemos, por exemplo, descrever a desigualdade:

$\binom{2n}{n} > \binom{2n}{p}$ (o sinal de igualdade só vale se p = n)

Exemplo 4:

$$\binom{20}{10} > \binom{20}{8};\ \binom{30}{15} > \binom{30}{21}$$

Relação de Stifel

$$\binom{n}{p-1} + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p}$$

Significa que a soma de dois números binomiais con secutivos de uma linha é igual ao número que está abaixo do número da direita.

Observe:

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & & & & & & \\
1 & 1 & & & & & \\
1 & 2 & 1 & & & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & & & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & \\
1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1
\end{array}$$

$$\binom{2}{1}+\binom{2}{2}=\binom{3}{2} \Rightarrow 2+1=3$$

$$\binom{5}{2}+\binom{5}{3}=\binom{6}{3} \Rightarrow 10+10=20$$

Essa propriedade é facilmente demonstrada, utilizando a relação:

$$\binom{n}{p}=\frac{n!}{(n-p)!\,p!}$$

A relação de Stifel pode ser utilizada como um dispositivo prático para a montagem do triângulo de Pascal sem o cálculo dos números binomiais. Além disso, ela é fundamental para a demonstração de algumas propriedades que veremos mais à frente.

Teorema das linhas

$$\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}=2^n$$

Significa que a soma dos elementos de uma linha do triângulo de Pascal é igual a uma potência de 2, cujo expoente é o índice da linha.

Esse fato pode ser observado no triângulo de Pascal.

Exemplo 5:

$$\binom{3}{0}+\binom{3}{1}+\binom{3}{2}+\binom{3}{3}=1+3+3+1=2^3$$

$$\sum_{j=0}^{15}\binom{15}{j}=2^{15}$$

$$\sum_{j=11}^{21}\binom{21}{j}=\frac{1}{2}\cdot 2^{21}=2^{20}$$

Teorema das colunas

$$\sum_{i=0}^{p}\binom{n+i}{n}=\binom{n+p+1}{n+1}$$

Significa que a soma dos números binomiais de uma mesma coluna, desde o primeiro elemento até um qualquer, é igual ao número binomial que fica imediatamente abaixo, na coluna situada à direita da que estamos somando.

Observe no triângulo de Pascal:

$$\begin{array}{cccccccc}
1 & & & & & & & \\
1 & 1 & & & & & & \\
1 & 2 & 1 & & & & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & & & & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & & \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & & \\
1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 & \\
1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 1
\end{array}$$

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{i=0}^{5}\binom{1+i}{1}=\binom{7}{2}=21\\ \displaystyle\sum_{i=0}^{3}\binom{3+i}{3}=\binom{7}{4}=35\end{cases}$$

A demonstração dessa propriedade é feita utilizando a relação de Stifel.

Somando:

$$\begin{aligned}
\binom{n}{n}&=\binom{n+1}{n+1}\\
\binom{n+1}{n}+\binom{n+1}{n+1}&=\binom{n+2}{n+1}\\
\binom{n+2}{n}+\binom{n+2}{n+1}&=\binom{n+3}{n+1}\\
\binom{n+3}{n}+\binom{n+3}{n+1}&=\binom{n+4}{n+1}\\
\cdots\qquad\qquad\cdots&\\
\binom{n+p-1}{n}+\binom{n+p-1}{n+1}&=\binom{n+p}{n+1}\\
\binom{n+p}{n}+\binom{n+p}{n+1}&=\binom{n+p+1}{n+1}
\end{aligned}$$

obtemos:

$$\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n}+\binom{n+2}{n}+\ldots+\binom{n+p\ \ 1}{n}+\binom{n+p}{n}=\binom{n+p+1}{n+1}$$

$$\sum_{i=0}^{p}\binom{n+i}{n}=\binom{n+p+1}{n+1}$$

Teorema das diagonais

$$\sum_{i=0}^{p}\binom{n+i}{i}=\binom{n+p+1}{p}$$

Significa que a soma dos números binomiais situados na mesma diagonal, desde a primeira coluna (coluna zero) até uma qualquer, é igual ao número binomial imediatamente abaixo, na mesma coluna.

Observe:

$$\begin{array}{cccccc}
1 & & & & & \\
1 & 1 & & & & \\
1 & 2 & 1 & & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1
\end{array}$$

$$\sum_{i=0}^{3}\binom{1+i}{i}=\binom{5}{3}=10$$

A demonstração utiliza também a relação de Stifel: somando:

$$\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0}$$

$$\binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{1} = \binom{n+2}{1}$$

$$\binom{n+2}{1} + \binom{n+2}{2} = \binom{n+3}{2}$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots$$

$$\binom{n+p-1}{p \quad 2} + \binom{n+p-1}{p \quad 1} = \binom{n+p}{p \quad 1}$$

$$\binom{n+p}{p-1} + \binom{n+p}{p} = \binom{n+p+1}{p}$$

obtemos:

$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \binom{n+3}{3} + \dots + \binom{n+p}{p} = \binom{n+p+1}{p}$$

$$\sum_{i=0}^{p} \binom{n+i}{i} = \binom{n+p+1}{p}$$

Observe ainda que o Teorema das diagonais pode ser obtido diretamente do Teorema das colunas:

$$\sum_{i=0}^{p} \binom{n+i}{n} = \binom{n+p+1}{n+1}$$ **(Teorema das colunas)**

Mas temos:

$$\begin{cases} \binom{n+i}{n} = \binom{n+i}{i} \\ \binom{n+p+1}{n+1} = \binom{n+p+1}{p} \end{cases}$$ **(Binômios complementares)**

Substituindo na expressão do Teorema das colunas, vem:

$$\sum_{i=0}^{p} \binom{n+i}{i} = \binom{n+p+1}{p}$$ **(Teorema das diagonais)**

Binômio de Newton

Observe as seguintes igualdades:

$$(x + a)^0 = 1$$
$$(x + a)^1 = x + a$$
$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$
$$(x + a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$$

Note que as sequências formadas pelos coeficientes numéricos dos polinômios em *x* são sequências binomiais:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1

Prova-se que esse resultado é válido para o desenvolvimento da potência **$(x + a)^n$**, para todo **n** natural. O desenvolvimento dessa potência é o que chamamos de desenvolvimento do **binômio de Newton**.

$$(x+a)^n = \binom{n}{0} \cdot x^n \cdot a^0 + \binom{n}{1} \cdot x^{n-1} \cdot a^1 + \dots + \binom{n}{n} \cdot x^0 \cdot a^n$$

De uma forma mais sintética, escreve-se:

$$(x+a)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} \cdot a^i$$

Exemplo 6:

a) $(x+2)^7 = \sum_{i=0}^{7} \binom{7}{i} x^{7-i}\ 2^i$

$(x + 2)^7 = x^7 + 7x^6 \cdot 2 + 21x^5 \cdot 2^2 + \dots + 2^7$

b) $(x \quad 1)^4 = \sum_{i=0}^{4} \binom{4}{i} x^{4-i} (\quad 1)^i$

$(x \quad 1)^4 = x^4 \quad 4x^3 + 6x^2 \quad 4x + 1$

O número de termos no desenvolvimento de $(x + a)^n$ é o número de elementos da sequência binomial de número *n*, ou seja, **(n + 1)** termos.

É usual indicar o desenvolvimento em potências decrescentes de *x*, estabelecendo uma ordem para os termos.

Podemos, então, considerar uma fórmula para o termo geral em função de sua posição:

$$T_{i+1} = \binom{n}{i} x^{n-i} \cdot a^i$$

Por exemplo, o quinto termo do desenvolvimento de $(x - 2)^8$ é:

$$T_5 = \binom{8}{4} x^{8-4} (-2)^4 = 16 \cdot 70x^4 \Rightarrow T_5 = 1120x^4$$

Exercícios resolvidos

1 Resolva a equação $12\binom{x}{1} + \binom{x+4}{2} = 162$.

Resolução:

$$\binom{x}{1} = \frac{x!}{1!\,(x \quad 1)!} = x$$

$$\binom{x+4}{2} = \frac{(x+4)!}{2!\,(x+2)!} = \frac{(x+4)\,(x+3)}{2}$$

$$12x + \frac{x^2 + 7x + 12}{2} = 162 \Rightarrow x = 8 \text{ ou } x = -39$$

Mas $x = -39$ não é admissível nas expressões iniciais.
Logo: $S = \{8\}$.

2 Resolva a equação $\binom{20}{2x} = \binom{20}{x+2}$.

Resolução:

Dois números binomiais com numeradores iguais estão na mesma linha do triângulo de Pascal, portanto, são iguais somente se:

a) tiverem o mesmo denominador;

b) forem complementares.

– Caso (a): $2x = x + 2$

$x = 2$

– Caso (b): $2x + x + 2 = 20$

$x = 6$

Assim, $x = 2$ ou $x = 6$, logo, $S = \{2, 6\}$.

3 Calcule $S = \sum_{p=5}^{15} \binom{p}{5}$.

Resolução:

$$S = \binom{5}{5} + \binom{6}{5} + \binom{7}{5} + \ldots + \binom{15}{5}$$

Teorema das colunas: $S = \binom{16}{6} = 8008$.

4 Calcule $S = \sum_{p=1}^{7} \binom{p+5}{p}$.

Resolução:

A soma em questão seria uma diagonal do triângulo de Pascal se houvesse o termo $\binom{5}{0}$.

Então: $S = \binom{6}{1} + \binom{7}{2} + \binom{8}{3} + \ldots + \binom{12}{7}$.

Teorema das diagonais:

$$\binom{5}{0} + S = \binom{12+1}{7} \Rightarrow S = \binom{13}{7} - \binom{5}{0} \quad \therefore \quad S = 1715$$

5 Qual é a soma dos coeficientes no desenvolvimento de $(x + 2y)^{11}$?

Resolução:

O valor numérico de qualquer expressão polinomial, quando se atribui o valor 1 a todas as variáveis, é igual à soma dos coeficientes.

Logo, nesse caso, a soma dos coeficientes vale:

$$(1 + 2)^{11} = 3^{11} = 177147$$

6 Mostre que:

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0.$$

Resolução:

A soma considerada é a soma dos coeficientes do desenvolvimento de $(x - y)^n$, que é igual a $(1 - 1)^n$ = zero.

De fato, veja:

$1 - 2 + 1 = 0$

$1 - 3 + 3 - 1 = 0$

$1 - 4 + 6 - 4 + 1 = 0$ e assim por diante

7 Qual é o termo independente de *x* no desenvolvimento de $\left(6x^2 \quad \frac{1}{3x^3}\right)^{15}$?

Resolução:

Termo geral:

$$T_{i+1} = \binom{15}{i} (6x^2)^{15-i} \left(\frac{-1}{3x^3}\right)^i$$

$$T_{i+1} = \binom{15}{i} 6^{15-i} \left(\frac{-1}{3}\right)^i x^{30-5i}$$

O termo independente de *x* é aquele em que o expoente de *x* é nulo. Logo: $30 - 5i = 0 \Rightarrow i = 6$.

Termo independente:

$$T_7 = \binom{15}{6} \cdot 6^9 \cdot \left(\frac{-1}{3}\right)^6 = \binom{15}{6} \cdot 2^9 \cdot 3^3$$

8 Calcule a soma $S = \sum_{i=100}^{200} \binom{10+i}{i}$.

Resolução:

A soma S é a soma da diagonal que vai de $\binom{10}{0}$ até $\binom{210}{200}$, menos a soma da diagonal que vai de $\binom{10}{0}$ até $\binom{109}{99}$.

Em símbolos:

$$S = \sum_{i=100}^{200} \binom{10+i}{i} = \sum_{i=0}^{200} \binom{10+i}{i} \quad \sum_{i=0}^{99} \binom{10+i}{i}$$

$$S = \binom{211}{200} - \binom{110}{99}$$

9 Determine o coeficiente do termo em x^2 do desenvolvimento de $(1 + x + x^2)^8$.

Resolução:

$$(1+x+x^2)^8 = \sum_{i=0}^{8} \binom{8}{i} 1^{8-i} (x+x^2)^i$$

$$(1+x+x^2)^8 = \sum_{i=0}^{8} \binom{8}{i} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} x^{i-j} (x^2)^j$$

$$(1+x+x^2)^8 = \sum_{i=0}^{8} \sum_{j=0}^{i} \binom{8}{i} \binom{i}{j} x^{i+j}$$

Termo em x^2: $i + j = 2$.

Isso ocorre para: $i = 2, j = 0$ e $i = 1, j = 1$.

Lembre-se de que $i \geq j$.

Vejamos cada caso:

- $i = 2, j = 0$: $\binom{8}{2} \binom{2}{0} x^2 = \binom{8}{2} x^2$
- $i = 1, j = 1$: $\binom{8}{1} \binom{1}{1} x^2 = \binom{8}{1} x^2$

Então, o coeficiente de x^2 será: $\binom{8}{1} + \binom{8}{2} = \binom{9}{2} = 36$.

Revisando

1 Resolva a equação $\binom{9}{2x+1} = \binom{9}{x+4}$.

2 Utilizando a propriedade dos números binomiais, calcule o valor de $x = \binom{13}{1} + \binom{13}{2} + \binom{13}{3} + \ldots + \binom{13}{12}$.

3 Calcule o valor das somatórias:

a) $\sum_{i=0}^{k+2} \binom{k+2}{i}$

b) $\sum_{k=2}^{n-1} \binom{n\ \ 1}{k}$

4 Resolva a equação
$\binom{2x}{0} + \binom{2x}{1} + \binom{2x}{2} + \ldots + \binom{2x}{2x} = 3 \cdot 2^{x+1} + 16$.

5 Desenvolva o binômio $(3x + y)^5$.

6 Determine o coeficiente de x^{12} do desenvolvimento de $(x^2 + 2x)^{10}$.

Exercícios propostos

1 Mostre que $\binom{9}{7} = \binom{9}{2}$.

2 Calcule o valor de *x* em cada expressão:

a) $\binom{4}{x+1} = \binom{4}{3x-5}$

b) $\binom{14}{3x} = \binom{14}{x+2}$

c) $\binom{18}{x\ \ 3} = \binom{18}{2x}$

3 Calcule o valor de *n* na expressão:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 4096$$

4 **Uece** A soma das soluções da equação $\binom{18}{6} = \binom{18}{4x-1}$ é:

A 8
B 5
C 6
D 7

5 **Unilins** O valor de *x* para que $\binom{14}{x+2} = \binom{14}{2x}$ é:

A 3
B 2 ou 4
C 5
D 6
E n.d.a.

6 O valor de *x* para que $\binom{14}{x^2\ \ 2} = \binom{14}{2x+1}$ é:

A 3
B 2
C –1
D 4 ou –5
E –2

7 Usando a relação de Stifel, decomponha cada binomial dado em uma soma de dois elementos da linha anterior. Observe o modelo do item (a).

a) $\binom{14}{6} = \binom{13}{6} + \binom{13}{5}$

b) $\binom{42}{37}$

c) $\binom{6}{1}$

d) $\binom{17}{8}$

e) $\binom{n}{p}$

f) $\binom{n-2}{p+2}$

g) $\binom{n}{p \quad 3}$

h) $\binom{n-p-1}{p \quad 2}$

8 Determine *x* nos casos:

a) $\binom{x}{3} = 5x$

b) $\binom{x}{2} = 45$

c) $\binom{x}{4} = \binom{x}{5}$

d) $\binom{x}{x-3} = \binom{x}{3}$

9 Em cada caso, dê o número binomial complementar do número binomial dado.

a) $\binom{9}{3}$

b) $\binom{15}{1}$

c) $\binom{17}{16}$

d) $\binom{30}{21}$

e) $\binom{33}{14}$

f) $\binom{n}{0}$

g) $\binom{n}{p}$

h) $\binom{n}{n-k}$

i) $\binom{n}{n \quad p}$

j) $\binom{2n+4}{n-1}$

10 Desenvolva os seguintes binômios:

a) $(2x + a)^3$

b) $\left(x + \frac{1}{4}\right)^3$

c) $(3x - 1)^6$

d) $(x + 2)^5$

e) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^7$

f) $\left(y + \frac{x}{2}\right)^5$

g) $\left(x + \sqrt{y}\right)^6$

h) $(x + 2y^2)^4$

11 **Efomm 2020** Assinale a alternativa que apresenta o termo independente de *x* na expansão binomial $\left(x^2 + \frac{1}{x^6}\right)^8$.

A 1
B 8
C 28
D 56
E 70

12 Determine o termo que se pede no desenvolvimento de cada binômio:

a) o termo em y^2 de $(2y \quad a)^5$.

b) o termo em x^4 de $(x^2 + 3)^4$.

c) o termo em x^9 de $(x + y)^{15}$.

d) o termo em x^3 de $\left(1 + \frac{3x}{2}\right)^6$.

13 Calcule o termo que se pede no desenvolvimento de cada binômio.

a) O quarto termo do desenvolvimento de $(x^2 + 4)^4$.

b) O décimo quinto termo do desenvolvimento de $(x + y)^{23}$.

c) O terceiro termo do desenvolvimento de $(2x + 3)^5$.

d) O quinto termo do desenvolvimento de $\left(x + \frac{1}{2}\right)^8$.

14 Calcule o termo central do desenvolvimento dos seguintes binômios:

a) $\left(x + \frac{a}{2}\right)^6$

b) $\left(x^2 + \frac{1}{2y}\right)^4$

15 Calcule a ordem do termo do desenvolvimento de $(x + 3)^9$, no qual o coeficiente numérico é 2 268 e o coeficiente binomial é 84.

16 **FGV-SP** O termo independente de *x* no desenvolvimento de $\left(x - \frac{1}{3x}\right)^8$ é:

A 70
B –70
C $\frac{70}{81}$
D $\frac{-70}{81}$
E n.d.a.

17 O quinto termo no desenvolvimento de $(x + 1)^9$ é:

A $378x^5$
B $126x^5$
C $120x^5$
D $84x^5$
E $36x^5$

18 **PUC-SP** O termo no desenvolvimento de $(2x^2 - y^3)^8$, que contém x^{10}, é:

A 2
B 3
C 4
D 5
E 6

19 **Cesgranrio** O coeficiente de *x* no desenvolvimento de $\left(x + \frac{1}{2}\right)^{21}$ é:

A $\frac{21}{2^{20}}$
B $\frac{201}{21}$
C $\frac{1}{2^{10}}$
D 21
E $\frac{1}{2}$

Texto complementar

Vida e obra de Blaise Pascal

Reprodução

Blaise Pascal (1623-1662) foi um célebre físico, matemático, filósofo e teólogo francês. Desde cedo, ele revelou um espírito extraordinário, não só pelas respostas que dava a certas questões, mas, sobretudo, pelas questões que ele próprio levantava a respeito da natureza das coisas. Perdeu a mãe aos três anos de idade e, como era o único filho do sexo masculino, o pai, Étienne Pascal, apegou--se muito a ele e encarregou se de sua educação, nunca o enviando a colégios.

Observe algumas das grandes contribuições de Pascal à humanidade:

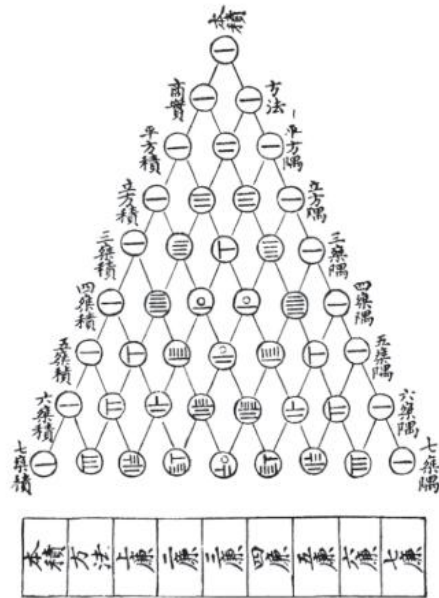
1. A pascalina foi a primeira calculadora mecânica do mundo, construída por Pascal entre 1642-1644. A máquina contém uma roda dentada construída com 10 "dentes". Cada dente corresponde a um algarismo, de 0 a 9. A primeira roda da direita corresponde às unidades, a imediatamente a sua esquerda às dezenas e assim sucessivamente. Foi projetada para realizar as quatro operações fundamentais.

PASCALINA

Blasie Pascal/David Monniaux

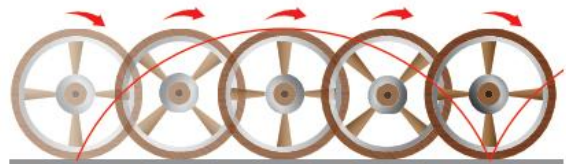
2. O triângulo de Pascal, conforme já estudamos, é um triângulo aritmético formado por números que possuem diversas relações entre si. Muitas dessas relações foram descobertas por Pascal, o que justifica o nome que lhe é dado, mas, apesar disso, a história nos mostra que o triângulo aritmético não é uma invenção de Pascal.

   Os italianos o chamam de triângulo de Tartaglia, os indianos possuem registros de 200 a.C. da utilização do triângulo e os chineses com o Manual de Matemática de Jia Xian, de 1050 d.C., que traz a seguinte figura:

TRIÂNGULO DE YANG HUI

Yáng Hui/Wikipedia

3. Conta-se que certa vez, sofrendo com uma dor de dente, Pascal colocou-se a pensar na cicloide e isso fez com que a dor desaparecesse. Ele entendeu que isso seria um sinal de Deus e passou a dedicar-se ao estudo da cicloide com maior profundidade.

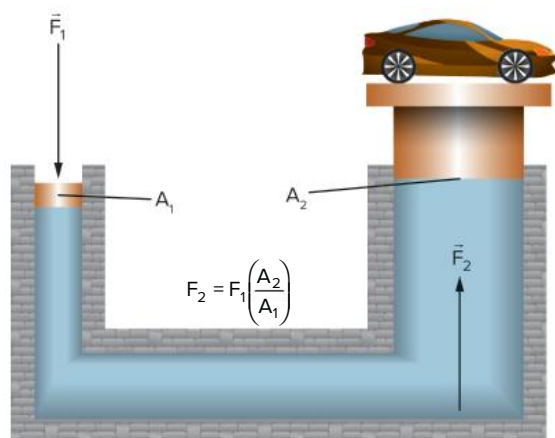
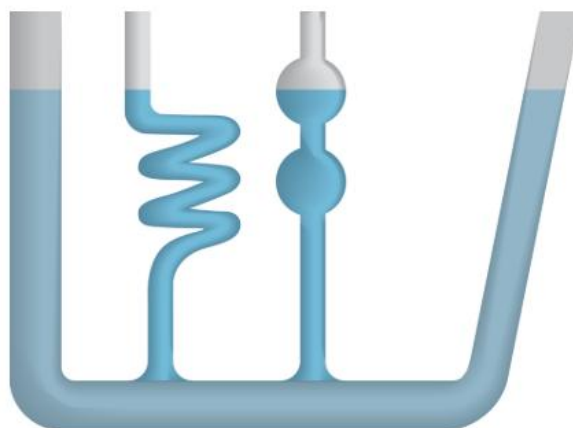
   A cicloide é um arco, formado a partir de um ponto de sua circunferência, que rola ao longo de uma superfície. Pascal descobriu áreas, volumes e centros de gravidades associados às propriedades da cicloide.

CICLOIDE

Algumas propriedades descobertas no século XVII:

- o comprimento da cicloide é quatro vezes o diâmetro da circunferência que a gera;
- a área limitada pelo arco é o triplo da área do círculo que roda.

4. Na Física, Pascal descobriu um princípio hidrostático que leva o seu nome. Esse princípio pode ser resumido assim: um aumento de pressão exercido em um determinado ponto de um líquido ideal se transmite integralmente aos demais pontos desse líquido e às paredes do recipiente em que ele está contido.

   Uma das principais aplicações desse princípio está nos sistemas hidráulicos de máquinas, em que um cilindro hidráulico é utilizado para multiplicar forças.

PRENSA HIDRÁULICA: AUMENTO DA FORÇA

PRINCÍPIO DE PASCAL

Resumindo

Neste capítulo, utilizamos técnicas da análise combinatória para o cálculo do binômio $(x + a)^n$, $n \in \mathbb{N}$ e $x, a \in \mathbb{R}$.

Teorema binomial: $(x+a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^{n-k} \cdot a^k$

O número $\binom{n}{k}$ é o chamado coeficiente binomial, tal que $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

O desenvolvimento do binômio é da forma:

$$(x+a)^n = \binom{n}{0} \cdot x^n + \binom{n}{1} \cdot x^{n-1} \cdot a + \binom{n}{2} x^{n-2} \cdot a^2 + \ldots + \binom{n}{p} \cdot x^{n-p} \cdot a^p + \ldots + \binom{n}{n} a^n$$

O termo $\binom{n}{p} x^{n-p} \cdot a^p$ é o chamado termo geral e ocupa a posição $(p + 1)$ (não se esqueça de que começamos com $k = 0$).

No desenvolvimento, se fizermos $x = a = 1$, teremos $x^{n\ \ p} = a^p = 1$, ou seja, a soma dos coeficientes do desenvolvimento:

$$(2)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n}$$

Quer saber mais?

Livro

- **GARBI, Gilberto Geraldo**. *A Rainha das Ciências*: *um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática*. 5. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2010.

Site

- O triângulo de Pascal é de Pascal?
  Disponível em: <www.mat.ufrgs.br/~portosil/histo2b.html>.

Exercícios complementares

1 Calcule o valor de $\sum_{p=2}^{9}\binom{10}{p}$.

2 Um estádio de futebol possui 23 portões, que podem ser abertos um a um, dois a dois, ... ou todos de uma só vez. De quantos modos pode ser aberto o estádio?

3 **Mackenzie 2019** Se S = {1, 2, 3, ..., 10}, o número de pares ordenados distintos, (A, B), em que A e B são subconjuntos, disjuntos, de S é:

A 3^{10}
B $3^{10} - 1$
C 3^{9}
D $2^{10} - 1$
E 2^{10}

4 **PUC-Minas** O resultado de $\sum_{p=2}^{6}\binom{8}{p}$ é igual a:

A 216
B 238
C 240
D 247
E 256

5 **Mackenzie 2017** Sabendo que $\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p} = 256$, então o valor de *n* vale

A 8
B 7
C 6
D 5
E 4

6 **Uece 2017** O coeficiente de x^6 no desenvolvimento de $\left(2x+\frac{1}{x^2}\right)^3 \cdot \left(x^2+\frac{1}{2x}\right)^3$ é

A 18
B 24
C 34
D 30

7 **Uece 2020** O termo independente de *x* no desenvolvimento binomial de $\left(x \cdot \sqrt[3]{x}+\frac{1}{x^3}\right)^{13}$ é:

A 725
B 745
C 715
D 735

8 **FGV-SP** No desenvolvimento de $\left(x+\frac{k}{x}\right)^{10}$, para que o coeficiente do termo em x^4 seja 15, *k* deve ser igual a:

A $\frac{1}{2}$
B 2
C $\frac{1}{3}$
D 3
E 4

9 **FGV-SP 2017** O coeficiente de x^{12} na expansão de $(1 + x^4 + x^5)^{10}$ é igual a

A 120
B 90
C 81
D 60
E 54

10 **EsPCEx 2015** O termo independente de *x* no desenvolvimento de $\left(x^3-\frac{1}{x^2}\right)^{10}$ é igual a:

A 110
B 210
C 310
D 410
E 510

11 O coeficiente de x^{20} em $(x^2 + 3x)^{12}$ vale:

A 65325
B 70214
C 40095
D 427229
E n.d.a.

12 **Uece 2019** O número inteiro *n*, maior do que 3, para o qual os números $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{2}$ e $\binom{n}{3}$ estão, nessa ordem, em progressão aritmética é:

Observação: $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

A n = 6
B n = 8
C n = 5
D n = 7

13 **Uece 2016** No desenvolvimento de $x(2x + 1)^{10}$ o coeficiente de x^3 é:

A 480
B 320
C 260
D 180

14 A soma dos coeficientes do desenvolvimento de $\left(3x^2 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$ é 1024. O termo independente de *x* desse desenvolvimento é:

A –1
B 405
C 504
D –240
E 360

15 Sejam α e β números reais. Suponha que ao desenvolvermos $(\alpha x + \beta y)^5$ os coeficientes dos monômios x^4y e x^3y^2 sejam iguais a 240 e 720, respectivamente. Nessas condições, assinale a opção que contém o valor de $\frac{\alpha}{\beta}$.

A $\frac{1}{2}$
B $\frac{3}{2}$
C $\frac{1}{3}$
D 3
E $\frac{2}{3}$

16 **ITA** Podemos afirmar que $\sum_{k=0}^{10} \cdot 2^k \cdot \binom{10}{k}$ é igual a:

A 2^{10}
B $2^{10} \quad 1$
C $3^{10} - 1$
D $3^{10} + 1$
E 3^{10}

17 **ITA** Qual o coeficiente de x^{17} no desenvolvimento de $(1 + x^5 + x^7)^{20}$?

A 0
B 1210
C 3000
D 3420
E 4000

18 **Unicamp** A desigualdade $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ é válida para $x \geq -1$ e *n* inteiro positivo. Faça a demonstração dessa desigualdade, apenas para o caso mais simples em que $x \geq 0$ e *n* é um inteiro positivo.

19 Determine os valores de $x \in \mathbb{R}$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ e de $n \in \mathbb{N}$ para os quais a igualdade abaixo se verifica.

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} (\sec x - \operatorname{tg} x)^{n-i} \cdot \frac{1}{(\sec x + \operatorname{tg} x)^i} = \frac{255}{(\sec x + \operatorname{tg} x)^n}$$

20 Resolva os sistemas.

a) $\begin{cases} \binom{m}{n} = \binom{m}{n+1} \\ 4\binom{m}{n} = 5\binom{m}{n-1} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \binom{x}{y} = \binom{x}{y+2} \\ \binom{x}{2} = 66 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \binom{n}{m} = \binom{n}{m+2} \\ \binom{n}{2} = 153 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \binom{m}{2} = \binom{m}{n+1} \\ \frac{m!}{(m-2)!} = 20 \end{cases}$

21 Resolva as equações.

a) $\binom{\binom{n}{2}}{2} = 105$

b) $\binom{\binom{n}{2}}{3} = 12\binom{n}{2}$

22 Determine *n* de modo que os números: $\frac{(n-1)!}{4}$; $n!$; $23(n+1)!$ estejam em PG nessa ordem.

23 Calcule a soma dos coeficientes dos desenvolvimentos dos seguintes binômios:

a) $(2x + 3a)^{10}$

b) $\left(3x^2 + \frac{1}{x}\right)^6$

c) $(a + b)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$

d) $(a \quad b)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$

e) $\left(\sqrt{x} + \frac{5}{\sqrt[3]{x}}\right)^{15}$

f) $\left(\frac{x}{4} - \frac{x^2}{6}\right)^5$

g) $\sum_{i=0}^{8} \binom{8}{i} (4x)^{8-i} (6)^i$

h) $\sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} \cdot a^{m-i} \cdot x^i$ $(m \in \mathbb{N}^*)$

i) $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot (-1)^i \cdot x^{n-i}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$

24 **ESPM 2018** No desenvolvimento do binômio $(x + p \cdot y)^n$, com *p* e *n* naturais, o termo $112x^6y^2$ é o terceiro quando feito com potências crescentes de *y* e o sétimo quando feito com potências crescentes de *x*. O valor de p + n é igual a:

A 10
B 12
C 9
D 11
E 13

25 **ITA 2018** Sejam *a* e *b* números inteiros positivos. Se *a* e *b* são, nessa ordem, termos consecutivos de uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$ e o termo independente de $\left(ax - \frac{b}{\sqrt{x}}\right)^{12}$ é igual a 7920, então a + b é:

A 2
B 3
C 4
D 5
E 6

© Kts Dreamstime.com

FRENTE 1

CAPÍTULO

14

Teoria das probabilidades

Quem poderia prever que a tentativa de solucionar um problema sobre jogo de dados daria origem a uma teoria também aplicada em genética, em energia nuclear ou em lançamentos de foguetes?

Diante de um problema envolvendo jogo de dados, os matemáticos franceses Blaise Pascal (1623-1662) e Pierre de Fermat (1601-1665) iniciaram o estudo que hoje chamamos de teoria das probabilidades.

Experimentos

Experimentos determinísticos

Considere o experimento: "Queda livre de um corpo". Sob certas condições, pode-se prever a velocidade com que o corpo tocará o solo. Experimentos como esse, cujo resultado pode-se prever, são denominados **experimentos determinísticos**.

Experimentos aleatórios

Considere os seguintes experimentos:

– lançamento de um dado;
– retirada de uma carta de um baralho;
– sorteio de uma bolinha no bingo.

Experimentos como esses, que, embora repetidos várias vezes, sob condições semelhantes, apresentam resultados imprevisíveis, são denominados **experimentos aleatórios**. Neste capítulo, serão estudados somente esse tipo de eventos.

Espaço amostral

O conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento é denominado **espaço amostral** ou **conjunto universo**, e será indicado por S.

Veja os exemplos a seguir.

Exemplo 1:

Seja o experimento: "lançar uma moeda honesta". Os resultados possíveis são: S = {C, K}, em que C = cara e K = coroa.

Exemplo 2:

No lançamento de um dado, os resultados possíveis são: S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

Exemplo 3:

No lançamento de duas moedas, os resultados possíveis são: S = {(C, C), (C, K), (K, C), (K, K)}.

Evento

Qualquer subconjunto do espaço amostral S é denominado **evento** e será indicado por **E**.

Exercício resolvido

1 Lançam-se uma moeda e um dado. Enumere os seguintes eventos.
E_1: sair cara e face par;
E_2: sair coroa.

Resolução:

Construiremos o seguinte quadro.

		Dado					
		1	2	3	4	5	6
Moeda	C	(C, 1)	(C, 2)	(C, 3)	(C, 4)	(C, 5)	(C, 6)
	K	(K, 1)	(K, 2)	(K, 3)	(K, 4)	(K, 5)	(K, 6)

Os eventos pedidos são:

E_1 = {(C, 2), (C, 4), (C, 6)},

E_2 = {(K, 1), (K, 2), (K, 3), (K, 4), (K, 5), (K, 6)}.

Observe que os eventos E_1 e E_2 são subconjuntos do espaço amostral.

Evento certo: é o evento que ocorre com certeza.

Exemplo 4:

Sair face maior ou igual a sete no lançamento de um dado.

– *Evento impossível*: é o subconjunto vazio (∅) do espaço amostral. É o evento que nunca ocorre.

Exemplo 5:

Obter soma maior que 12 no lançamento de dois dados.

Operações com eventos

União de eventos

Considere o experimento "lançar um dado e observar o número da face voltada para cima".

O espaço amostral desse experimento é S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

Sejam os eventos:

E_1: ocorrer face par ⇒ E_1 = {2, 4, 6};

E_2: ocorrer número menor que 3 ⇒ E_2 = {1, 2}.

O evento que se obtém quando ocorre face par **ou** um número menor que 3 é denominado **evento união**, isto é:

$E_1 \cup E_2$ = {1, 2, 4, 6}.

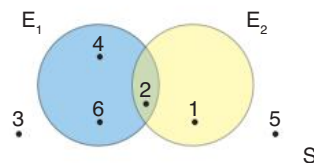



Fig. 1 União de dois eventos.

Interseção de eventos

Considere o mesmo experimento anterior e os seguintes eventos.

E_1: ocorrer face par ⇒ E_1 = {2, 4, 6};

E_2: ocorrer número múltiplo de 3 ⇒ E_2 = {3, 6}.

O evento que se obtém quando ocorre face par **e** um número múltiplo de 3 é denominado **evento interseção** do evento E_1 com o evento E_2; isto é: $E_1 \cap E_2$ = {6}.

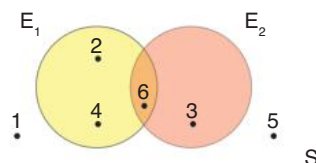



Fig. 2 Interseção de dois eventos.

Eventos mutuamente exclusivos

São eventos que não ocorrem simultaneamente, isto é:

$$E_1 \cap E_2 = \phi$$

Considere o experimento anterior e os seguintes eventos:

– E_1: obter face ímpar;
– E_2: obter face par.

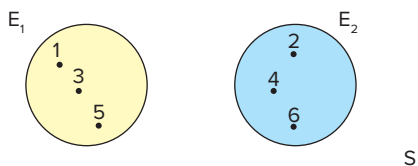



Fig. 3 Eventos mutuamente exclusivos.

Os eventos E_1 e E_2 são denominados **mutuamente exclusivos**.

Eventos complementares

Seja o experimento "sortear uma bolinha numerada de 1 a 5", o espaço amostral é S = {1, 2, 3, 4, 5}.

Seja o evento E: sair bolinha par ⇒ E = {2, 4}, o evento "não sair bolinha par" é denominado **evento complementar** do evento dado E e é indicado por $\bar{E}$. Então, $\bar{E} = \{1, 3, 5\}$. Observe que os eventos E e seu complementar $\bar{E}$ nunca ocorrem simultaneamente.

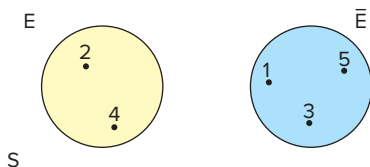



Fig. 4 Eventos complementares.

Observando o diagrama acima, conclui-se:

- $E \cap \bar{E} = \phi$, (mutuamente exclusivos);
- $E \cup \bar{E} = S$;
- $\bar{E} = S - E$.

Exercício resolvido

2 No lançamento de um dado e uma moeda, tem-se o seguinte espaço amostral.
S = {(C, 1), (C, 2), (C, 3), (C, 4), (C, 5), (C, 6), (K, 1), (K, 2), (K, 3), (K, 4), (K, 5), (K, 6)}

Enumerar os seguintes eventos.

a) A: ocorrer coroa.
b) B: ocorrer o número 5.
c) C: ocorrer número ímpar.
d) $A \cap B$: ocorrer coroa e número 5.
e) $A \cup B$: ocorrer coroa ou número 5.
f) $A \cap C$: ocorrer coroa e número ímpar.
g) $\bar{A}$: não ocorrer coroa.
h) $\bar{B}$: não ocorrer o número 5.
i) $\bar{A} \cap B$: não ocorrer coroa e número 5.
j) $\bar{A} \cap \bar{B}$: não ocorrer coroa nem o número 5.

Resolução:

a) A = {(K, 1), (K, 2), (K, 3), (K, 4), (K, 5), (K, 6)}
b) B = {(C, 5), (K, 5)}
c) C = {(C, 1), (K, 1), (C, 3), (K, 3), (C, 5), (K, 5)}
d) $A \cap B$ = {(K, 5)}
e) $A \cup B$ = {(K, 1), (K, 2), (K, 3), (K, 4), (K, 5), (K, 6), (C, 5)}
f) $A \cap C$ = {(K, 1), (K, 3), (K, 5)}
g) $\bar{A}$ = {(C, 1), (C, 2), (C, 3), (C, 4), (C, 5), (C, 6)}
h) $\bar{B}$ = {(C, 1), (C, 2), (C, 3), (C, 4), (C, 6), (K, 1), (K, 2), (K, 3), (K, 4), (K, 6)}
i) $\bar{A} \cap B$ = {(C, 5)}
j) $\bar{A} \cap \bar{B}$ = {(C, 1), (C, 2), (C, 3), (C, 4), (C, 6)}

Espaço amostral equiprovável

Espaço amostral equiprovável de um experimento aleatório é aquele cujos elementos têm a **mesma chance** de ocorrer.

O lançamento de um dado comum, por exemplo, é um experimento que apresenta espaço amostral equiprovável, pois são iguais as chances de ocorrência de cada uma das faces.

Probabilidade de um evento

Seja S um espaço amostral equiprovável de um experimento aleatório, e E um evento desse espaço amostral.

! Atenção

A probabilidade de um evento é definida pelo número real P(E), tal que:

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$$

em que:

n(E): número de elementos do evento E,

n(S): número de elementos do espaço amostral S.

Propriedades

Primeira propriedade

A probabilidade do evento certo é igual a 1; isto é: P(E) = 1.

Exemplo 6:

Sair um número menor ou igual a 6 no lançamento de um dado é um evento certo. A probabilidade desse evento é 1.

Segunda propriedade

A probabilidade de ocorrer um evento E do espaço amostral S é sempre maior ou igual a zero e menor ou igual a um; isto é: $0 \le P(E) \le 1$.

Exercícios resolvidos

3 No lançamento de um dado, determinar a probabilidade de se obter:

a) o número 3.
b) um número par.
c) um número maior que 2.

Resolução:

Tem-se: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $n(S) = 6$, então:

a) $E = \{3\} \Rightarrow n(E) = 1$ e $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$

Portanto: $P(E) = \frac{1}{6}$.

b) $E_1 = \{2, 4, 6\} \Rightarrow n(E_1) = 3$ e $P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S)} \Rightarrow P(E_1) = \frac{3}{6}$

Portanto: $P(E_1) = \frac{1}{2}$ (50%).

c) $E_2 = \{3, 4, 5, 6\} \Rightarrow n(E_2) = 4$ e $P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(S)} \Rightarrow P(E_2) = \frac{4}{6}$

Portanto: $P(E_2) = \frac{2}{3}$.

4 Considere o experimento aleatório: "lançar dois dados e observar as faces voltadas para cima". Determine a probabilidade de se obter:

a) a soma dos pontos igual a 10.
b) o número em uma das faces igual ao dobro do número na outra face.
c) a soma dos pontos igual a 13.
d) soma dos pontos menor ou igual a 12.
e) faces iguais.

Resolução:

O espaço amostral é dado pela tabela da dupla entrada, mostrada a seguir.

		Branco					
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Preto	**1**	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
	2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
	3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
	4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
	5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
	6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

Tem-se $n(S) = 36$.

a) E: soma dos pontos igual a 10.
Tem-se $E = \{(4, 6), (5, 5), (6, 4)\}$ e $n(E) = 3$, então:

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} \Rightarrow P(E) = \frac{3}{36}$$

Portanto: $P(E) = \frac{1}{12}$.

b) E_1: obter em uma das faces número igual ao dobro do número na outra face.
Tem se $E_1 = \{(1, 2), (2, 1), (2, 4), (3, 6), (4, 2), (6, 3)\}$ e $n(E_1) = 6$, então:

$$P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S)} \Rightarrow P(E_1) = \frac{6}{36}$$

Portanto: $P(E_1) = \frac{1}{6}$.

c) E_2: obter a soma dos pontos igual a 13.
Tem-se $E_2 = \phi$, então, $P(E_2) = 0$ (probabilidade do evento impossível).

d) E_3: obter soma dos pontos menor ou igual a 12.
Tem-se $E_3 = S$ e $n(E_3) = n(S)$, então:

$$P(E_3) = \frac{n(E_3)}{n(S)} \Rightarrow P(E_1) = \frac{36}{36}$$

Portanto: $P(E_3) = 1$ (probabilidade do evento certo).

e) E_4: obter faces iguais.
Tem-se $E_4 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$ e $n(E_4) = 6$, então:

$$P(E_4) = \frac{n(E_4)}{n(S)} \Rightarrow P(E_4) = \frac{6}{36}$$

Portanto: $P(E_4) = \frac{1}{6}$.

5 De um baralho de 52 cartas, tira-se ao acaso uma carta. Determine a probabilidade de que a carta seja:

a) um valete.
b) um rei de copas.
c) uma carta de espadas.

Resolução:

O espaço amostral é formado por 52 cartas, isto é, $n(S) = 52$.

a) E: sair um valete.
Tem-se $n(E) = 4$ (são quatro valetes no baralho), então:

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} \Rightarrow P(E) = \frac{4}{52}$$

Portanto: $P(E) = \frac{1}{13}$.

b) E_1: sair um rei de copas $\Rightarrow n(E_1) = 1$ (existe apenas um rei de copas).

$$P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S)} \Rightarrow P(E_1) = \frac{1}{52}$$

Portanto: $P(E_1) = \frac{1}{52}$.

c) E_2: sair carta de espadas $\Rightarrow n(E_2) = 13$.

$$P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(S)} \Rightarrow P(E_2) = \frac{13}{52}$$

Portanto: $P(E_2) = \frac{1}{4}$ (25%).

6 Em uma caixa, existem cinco bolas brancas e oito bolas azuis. Duas bolas são retiradas simultaneamente da caixa, aleatoriamente. Qual a probabilidade de serem brancas?

Resolução:

Em alguns casos, não é aconselhável enumerar o espaço amostral. Deve-se, então, aplicar, como processo de contagem, a análise combinatória.
O espaço amostral é formado por todas as maneiras de se retirar duas bolas, isto é: $n(S) = \binom{13}{2} = \frac{13 \cdot 12}{2!} = 78$.

Existem 78 maneiras de se retirar duas bolas.
E: retirar duas bolas brancas.

$$n(E) = \binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2!} = 10$$

Existem dez maneiras de se retirar duas bolas brancas.
Então:

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} \Rightarrow P(E) = \frac{10}{78} \Rightarrow P(E) = \frac{5}{39}$$

Portanto: $P(E) = \frac{5}{39}$.

7 De um baralho de 52 cartas, são retiradas quatro cartas aleatoriamente, sem reposição. Qual a probabilidade de se obter(em):

a) uma quadra?
b) quatro cartas do mesmo naipe?

Resolução:

Tem-se:

$$n(S) = \binom{52}{4} = 270\,725$$

a) E: sair quadra (4 símbolos iguais, um de cada naipe).
$n(E) = 13$ (existem treze quadras no baralho), então:

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} \Rightarrow P(E) = \frac{13}{270725}$$

Portanto: $P(E) \cong 0{,}0048\%$.

b) E_1: sair quatro cartas do mesmo naipe.
Tem-se:
$C_{13,4}$ maneiras de se tirar 4 cartas de espadas,
$C_{13,4}$ maneiras de se tirar 4 cartas de copas,
$C_{13,4}$ maneiras de se tirar 4 cartas de paus,
$C_{13,4}$ maneiras de se tirar 4 cartas de ouros.
Existem, então:
$C_{13,4} + C_{13,4} + C_{13,4} + C_{13,4} = 4C_{13,4}$
maneiras de se tirar 4 cartas de cada naipe.

Portanto: $P(E_1) = 4\frac{C_{13,4}}{C_{52,4}}$.

Probabilidade da união de dois eventos

Sejam E_1 e E_2 eventos quaisquer de um espaço amostral S. Então, pode-se escrever:

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$$

Demonstração:
Pela teoria dos conjuntos, sabe-se que:

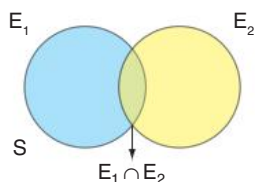



Fig. 5 Probabilidade da união de dois eventos.

$$E_1 \cup E_2 = E_1 + E_2 - (E_1 \cap E_2) \text{ e que}$$
$$n(E_1 \cup E_2) = n(E_1) + n(E_2) - n(E_1 \cap E_2)$$

Dividindo por n(S) a expressão anterior, obtém-se:

$$\frac{n(E_1 \cup E_2)}{n(S)} = \frac{n(E_1)}{n(S)} + \frac{n(E_2)}{n(S)} - \frac{n(E_1 \cap E_2)}{n(S)}$$

Portanto:

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$$

Observação:
Se os eventos forem mutuamente exclusivos, isto é, $E_1 \cap E_2 = \phi$, então $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$.

Exercícios resolvidos

8 Dois dados são lançados simultaneamente. Determine a probabilidade de a soma das faces ser 8 ou um número primo.

Resolução:

Sejam os eventos:
E_1: a soma das faces é 8;
E_2: a soma das faces é um número primo.
Então, tem-se: $n(S) = 36$ e $E_1 = \{(2, 6), (6, 2), (3, 5), (5, 3), (4, 4)\} \Rightarrow n(E_1) = 5$.
$E_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (1, 6), (2, 1), (2, 3), (2, 5), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 3), (5, 2), (5, 6), (6, 1), (6, 5)\} \Rightarrow n(E_2) = 15$.
Calculando as probabilidades, temos:

$$P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S)} \Rightarrow P(E_1) = \frac{5}{36} \text{ e}$$

$$P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(S)} \Rightarrow P(E_2) = \frac{15}{36}$$

Então:

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$$

$$P(E_1 \cup E_2) = \frac{5}{36} + \frac{15}{36} \Rightarrow P(E_1 \cup E_2) = \frac{20}{36}$$

Portanto:

$$P(E_1 \cup E_2) = \frac{5}{9} \text{ (observar que } E_1 \cap E_2 = \phi)$$

9 Uma carta é retirada de um baralho de 52 cartas. Determine a probabilidade de ela ser:

a) uma dama ou uma carta de copas.
b) vermelha ou ser figura.

Resolução:

a) Sejam os eventos:
E_1: sair dama $\Rightarrow n(E_1) = 4$;
E_2: sair carta de copas $\Rightarrow n(E_2) = 13$;
$E_1 \cap E_2$: sair dama de copas $\Rightarrow n(E_1 \cap E_2) = 1$.

Tem-se as seguintes probabilidades:

$$P(E_1)=\frac{n(E_1)}{n(S)}\Rightarrow P(E_1)=\frac{4}{52};$$

$$P(E_2)=\frac{n(E_2)}{n(S)}\Rightarrow P(E_2)=\frac{13}{52}\text{ e}$$

$$P(E_1\cap E_2)=\frac{n(E_1\cap E_2)}{n(S)}\Rightarrow P(E_1\cap E_2)=\frac{1}{52}$$

Aplicando-se o conceito de probabilidade da união de eventos, temos:

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$$

$$P(E_1\cup E_2)=\frac{4}{52}+\frac{13}{52}-\frac{1}{52}\Rightarrow \quad P(E_1\cup E_2)=\frac{16}{52}$$

Portanto: $P(E_1\cup E_2)=\frac{4}{13}$.

b) Sejam os eventos:
E_3: sair carta vermelha $\Rightarrow n(E_3) = 26$;
E_4: sair figura $\Rightarrow n(E_4) = 12$;
$E_3 \cap E_4$: sair carta vermelha e figura $\Rightarrow n(E_3 \cap E_4) = 6$.
Tem-se:

$$P(E_3)=\frac{n(E_3)}{n(S)}\Rightarrow P(E_3)=\frac{26}{52};$$

$$P(E_4)=\frac{n(E_4)}{n(S)}\Rightarrow P(E_4)=\frac{12}{52}\text{ e}$$

$$P(E_3\cap E_4)=\frac{n(E_3\cap E_4)}{n(S)}\Rightarrow P(E_3\cap E_4)=\frac{6}{52}$$

Então:

$$P\left(E_3\cup E_4\right)=\frac{26}{52}+\frac{12}{52}-\frac{6}{52}\Rightarrow \; P\left(E_1\cup E_2\right)=\frac{32}{52}$$

Portanto: $P\left(E_3\cup E_4\right)=\frac{8}{13}$.

Probabilidade do evento complementar

Sejam os eventos E e seu complementar $\bar{E}$ do espaço amostral S. Como E e $\bar{E}$ são mutuamente exclusivos, isto é, $E\cap\bar{E}=\phi$, tem-se:

$$P(E \cup \bar{E}) = P(E) + P(\bar{E})$$

Como $E \cup \bar{E} = S$, então $P(E \cup \bar{E}) = 1$.

Portanto: $P(E) + P(\bar{E}) = 1$.

Observe os exercícios resolvidos a seguir.

Exercícios resolvidos

10 Uma caixa contém dez bolas, das quais três são vermelhas, cinco são azuis e duas são pretas. Retira-se uma bola ao acaso. Qual é a probabilidade de:

a) ser vermelha?

b) não ser vermelha?

Resolução:

Tem-se $n(S) = 10$.

a) Seja o evento E: sair bola vermelha $\Rightarrow n(E) = 3$.
Então: $P(E)=\frac{3}{10}$.

b) Seja $\bar{E}$: não sair bola vermelha (evento complementar do evento E).
Como $P(E)+P\left(\bar{E}\right)=1$.
Então: $P\left(\bar{E}\right)=1-P(E)\Rightarrow P\left(\bar{E}\right)=1-\frac{3}{10}$.
Portanto: $P\left(\bar{E}\right)=\frac{7}{10}$.

11 Em uma luta de boxe, costuma-se dizer que as chances de um boxeador ganhar uma luta são de "dois para um". Então, qual é a probabilidade de esse boxeador ganhar? E de perder?

Resolução:

Escrevendo-se o enunciado na forma de proporção, tem-se:

$$\frac{P(\text{ganhar})}{P(\text{perder})}=\frac{2}{1},\text{ indicando } P(\text{ganhar}) = p$$

Então: $P(\text{perder}) = 1 - p$.

Substituindo-se, tem-se: $\frac{p}{1\ \ p}=\frac{2}{1}\Rightarrow p=\frac{2}{3}(66{,}67\%)$

e $1 - p = 1 - 0{,}6667 \Rightarrow 1 - p = 100\% - 66{,}67\% = 33{,}33\%$.
Portanto: $P(\text{ganhar}) = 66{,}67\%$ e $P(\text{perder}) = 33{,}33\%$.

12 Em um grupo de sete estudantes, há quatro de Engenharia e três de Matemática. Escolhidos dois estudantes ao acaso, qual é a probabilidade de pelo menos um deles ser de Matemática?

Resolução:

Existem $C_{7,2}$ maneiras de escolher dois estudantes, isto é, $C_{7,2}=\frac{A_{7,2}}{2!}=\frac{7\cdot 6}{2}=21$, então, $n(S) = 21$.

Existem $C_{4,2}=\frac{4\cdot 3}{2}=6$ maneiras de escolher dois estudantes de Engenharia.

Seja E: escolher dois estudantes de Engenharia, então:

$$P(E)=\frac{n(E)}{n(S)}\Rightarrow P(E)=\frac{6}{21}\Rightarrow P(E)=\frac{2}{7}$$

Seja $\bar{E}$: sair pelo menos um estudante de Matemática.

Tem-se, então: $P\left(\bar{E}\right)=1-P(E)\Rightarrow P\left(\bar{E}\right)=1-\frac{2}{7}$.

Portanto, $P\left(\bar{E}\right)=\frac{5}{7}$ é a probabilidade de pelo menos um dos estudantes ser de Matemática.

Probabilidade condicional

Acompanhe o seguinte exemplo.

Considere um grupo de vinte estudantes, dos quais treze são homens e sete são mulheres. Cinco homens e três mulheres usam óculos, como mostra o quadro abaixo.

	Usam	Não usam	Total
Homem	5	8	13
Mulher	3	4	7
Total	8	12	20

Escolhido um estudante ao acaso, considere os seguintes eventos.

E_1: o estudante escolhido não usa óculos $\rightarrow P(E_1) = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$

E_2: o estudante é mulher $\rightarrow P(E_2) = \frac{7}{20}$

Qual é a probabilidade de o estudante não usar óculos, sabendo que é mulher?

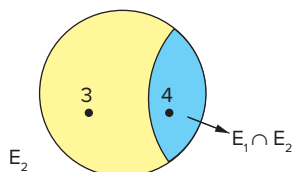
Observe que, a partir da nova informação "sabendo que é mulher", pode-se reduzir o espaço amostral.

O novo espaço amostral será constituído por sete mu lheres, das quais quatro não usam óculos.

Portanto, a probabilidade procurada é $\frac{4}{7}$.

Sabendo-se que o evento E_2 já ocorreu e que a probabilidade de E_1 é a desejada, pode-se calculá-la pela expressão:

$$P(E_1/E_2) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)}$$

A probabilidade $P(E_1/E_2)$, que se lê "probabilidade do evento E_1, dado E_2", é denominada **probabilidade condicional**.

Aplicando no exemplo dado, tem-se:

$$P(E_1 \cap E_2) = \frac{4}{20};\ P(E_2) = \frac{7}{20}$$

Então: $P(E_1/E_2) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)}$.

$$P(E_1/E_2) = \frac{\frac{4}{20}}{\frac{7}{20}} = \frac{4}{20} \cdot \frac{20}{7}$$

Portanto: $P(E_1/E_2) = \frac{4}{7}$.

De um modo geral, se S é um espaço amostral e E_1 e E_2 seus eventos, denomina-se *probabilidade condicional* de E_1, dado E_2, representada por $P(E_1/E_2)$, a probabilidade de ocorrer E_1 uma vez que já ocorreu E_2, isto é:

$$P(E_1/E_2) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)} \text{ com } P(E_2) \neq 0$$

Exercício resolvido

13 Lançam-se dois dados. Qual é a probabilidade de o número do primeiro dado ser quatro, sabendo-se que os números são pares?

Resolução:

Sejam os eventos:

E_1: o número no primeiro dado é quatro:

$$E_1 = \{(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6)\}$$

E_2: os dois números são pares:

$E_2 = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (4, 2), (4, 4), (4, 6), (6, 2), (6, 4), (6, 6)\} \Rightarrow n(E_2) = 9$

Observe que o evento E_2 já ocorreu e $P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(S)}$.

Então, $P(E_2) = \frac{9}{36}$.

Tem-se também $E_1 \cap E_2 = \{(4, 2), (4, 4), (4, 6)\}$,

$n(E_1 \cap E_2) = 3$ e $P(E_1 \cap E_2) = \frac{3}{36}$.

Como $P(E_1/E_2) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)}$, então temos:

$$P(E_1/E_2) = \frac{\frac{3}{36}}{\frac{9}{36}} \Rightarrow P(E_1/E_2) = \frac{3}{9}$$

Portanto: $P(E_1/E_2) = \frac{1}{3}$.

Produto de probabilidades

Da definição de probabilidade condicional, deve-se lembrar que:

$$P(E_1/E_2) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)} \Rightarrow P(E_1 \cap E_2) = P(E_2) \cdot P(E_1/E_2) \text{ e}$$

$$P(E_2/E_1) = \frac{P(E_2 \cap E_1)}{P(E_1)} \Rightarrow P(E_2 \cap E_1) = P(E_1) \cdot P(E_2/E_1)$$

Observe que $P(E_1 \cap E_2) = P(E_2 \cap E_1)$, então:

$$P(E_2) \cdot P(E_1/E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2/E_1)$$

Portanto:

A probabilidade de ocorrer, simultaneamente, dois eventos, é igual ao produto da probabilidade de um deles pela probabilidade do outro, dado que o primeiro ocorreu.

Eventos independentes

Considere o seguinte experimento: “Um dado é lançado e observa-se a face voltada para cima”.

Sejam os eventos:

E_1: ocorrer face par,

E_2: ocorrer face maior que quatro.

Tem-se:

$$P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S)} \Rightarrow P(E_1) = \frac{3}{6} \Rightarrow P(E_1) = \frac{1}{2}$$

$$P(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{6};\ P(E_2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Como: $P\left(E_1/E_2\right) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)} \Rightarrow P\left(E_1/E_2\right) = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$.

Observe que $P\left(E_1/E_2\right) = \frac{1}{2}$ e $P(E_1) = \frac{1}{2}$.

Isso significa que o fato de ter ocorrido E_2 não influenciou no cálculo da probabilidade de E_1. Nesse caso, diz-se que os eventos E_1 e E_2 são **independentes**.

Portanto, diz-se que dois eventos, E_1 e E_2, de um espaço amostral S são independentes se:

$$P(E_1/E_2) = P(E_1) \text{ ou } P(E_2/E_1) = P(E_2)$$

Tem-se, então:

$$P\left(E_1/E_2\right) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)}$$

Como $P(E_1/E_2) = P(E_1)$, vem:

$$P(E_1) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)}$$

Assim:

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2)$$

A regra do produto pode ser generalizada para *n* eventos independentes entre si. A probabilidade de ocorrer, simultaneamente, os eventos $E_1, E_2, \ldots E_n$ é dada por:

$$P(E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_n) = P(E_1) \cdot P(E_2) \cdot \ldots \cdot P(E_n)$$

Exercícios resolvidos

14 Qual é a probabilidade de, no lançamento de um dado branco e um dado preto, ocorrer face quatro no dado branco e face dois no dado preto?

Resolução:

Sejam os eventos:

E_1: ocorrer face quatro no dado branco;

E_2: ocorrer face dois no dado preto.

Tem-se: $P(E_1) = \frac{1}{6}$ e $P(E_2) = \frac{1}{6}$.

Então:

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2) \Rightarrow P(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$$

Portanto: $P(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{36}$.

15 Lançam-se um dado e uma moeda. Qual é a probabilidade de se obter face três no dado e coroa na moeda?

Resolução:

Sejam os eventos:

E_1: obter face dois no dado;

E_2: obter coroa na moeda.

Tem-se: $P(E_1) = \frac{1}{6}$ e $P(E_2) = \frac{1}{2}$.

Então: $P(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow P(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{12}$.

16 Lançam-se três dados. Qual é a probabilidade de se obter face cinco nos três?

Resolução:

Sejam os eventos:

E_1: ocorrer face cinco no primeiro dado;

E_2: ocorrer face cinco no segundo dado;

E_3: ocorrer face cinco no terceiro dado.

Tem-se: $P(E_1) = \frac{1}{6}$; $P(E_2) = \frac{1}{6}$ e $P(E_3) = \frac{1}{6}$.

Então: $P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$.

Portanto: $P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = \frac{1}{216}$.

17 Seja uma urna contendo seis bolas numeradas de um a seis. Qual é a probabilidade de se retirar a bola número um e, sem repetição desta, a bola número dois sair em seguida?

Resolução:

Sejam os eventos:

E_1: ocorrer bola número um $\Rightarrow P(E_1) = \frac{1}{6}$,

E_2: ocorrer bola número dois, sabendo que ocorreu bola número um $\Rightarrow P\left(E_1/E_2\right) = \frac{1}{5}$.

Então:

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_1/E_2) \Rightarrow P(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5}$$

Portanto: $P(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{30}$.

Revisando

1 Enumere o espaço amostral do evento "retirar 3 bolas, sucessivamente e sem reposição", de uma urna contendo 3 bolas pretas e 4 brancas.

2 Enumere e determine o número de eventos possíveis de sortear os segmentos determinados pelos vértices de um pentágono ABCDE.

3 Retirando-se uma bola de uma urna contendo 3 bolas brancas, 2 pretas e 5 vermelhas, qual é a probabilidade de que saia uma bola branca?

4 Retirando-se simultaneamente 4 bolas do exercício anterior, qual é a probabilidade de obter-se 2 bolas brancas e 2 bolas vermelhas?

5 Jogando-se dois dados, calcule a probabilidade dos seguintes eventos.

a) Obter diferença dos pontos (maior menos o menor) igual a 3.

b) Obter pelo menos um resultado igual a 2.

Verifique se os eventos são independentes.

Exercícios propostos

1 No lançamento de dois dados, D_1 e D_2, tem-se o seguinte espaço amostral, dado em forma de tabela de dupla entrada.

		D_1					
		1	2	3	4	5	6
D_2	1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
	2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
	3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
	4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
	5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
	6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

Enumere os seguintes eventos.

a) A = {a soma dos pontos é 8}

b) B = {sair faces iguais}

c) C = {uma face é o dobro da outra}

d) D = {a soma das faces é maior que 12}

2 No lançamento de um dado, enumere os seguintes eventos.

a) A = {ocorrer face ímpar}

b) B = {ocorrer face menor que 3}

c) C = {ocorrer face maior que 6}

d) D = {ocorrer um múltiplo de 2}

3 Considere o seguinte experimento: "lançar dois dados e observar as faces voltadas para cima". Construa o espaço amostral e enumere os seguintes eventos.

a) A: a soma dos pontos é menor que 5.

b) B: a soma dos pontos é par.

c) C: uma face é par e a outra é ímpar.

d) $A \cap B$

e) $A \cup B$

f) $\overline{A}$

g) $\overline{B}$

h) $\overline{A} \cap B$

i) $\overline{A} \cap \overline{B}$

j) $A \cap \overline{A}$

k) $A \cup \overline{A}$

l) $\overline{A \cap B}$

4 Considere o evento: "lançamento de duas moedas e observação da face voltada para cima". Construa o espaço amostral e enumere os seguintes eventos.

a) A: ocorrer cara em uma das faces.
b) B: ocorrer coroa em uma das faces.
c) $A \cap B$
d) C: não ocorrer cara.

5 **UFRGS 2020** Um jogador, ao marcar números em um cartão de aposta, como o representado na figura abaixo, decidiu utilizar apenas seis números primos.

[01] [02] [03] [04] [05] [06] [07] [08] [09] [10]
[11] [12] [13] [14] [15] [16] [17] [18] [19] [20]
[21] [22] [23] [24] [25] [26] [27] [28] [29] [30]
[31] [32] [33] [34] [35] [36] [37] [38] [39] [40]
[41] [42] [43] [44] [45] [46] [47] [48] [49] [50]
[51] [52] [53] [54] [55] [56] [57] [58] [59] [60]

A probabilidade de que os seis números sorteados no cartão premiado sejam todos números primos é:

A $\frac{C_{17,6}}{C_{60,6}}$

B $\frac{1}{C_{60,6}}$

C $\frac{C_{60,6}}{C_{17,6}}$

D $\frac{A_{17,6}}{A_{60,6}}$

E $\frac{A_{60,6}}{A_{17,6}}$

6 **UEPG 2018** Considerando que uma estante contém 6 livros de história, 4 livros de português e 5 livros de matemática, assinale o que for correto:

01 Se um livro é retirado da estante, a probabilidade desse livro ser de matemática é $\frac{1}{3}$.

02 Se dois livros forem retirados da estante, sem reposição, a probabilidade de o primeiro livro ser de história e o segundo de português é $\frac{4}{35}$.

04 Se três livros forem retirados da estante, sem reposição, a probabilidade do primeiro livro ser de história, o segundo de português e o terceiro de matemática é $\frac{4}{91}$.

08 Se um livro for retirado da estante, a probabilidade desse livro ser de história ou de português é $\frac{2}{3}$.

Soma:

7 **ITA 2020** Lançando três dados de 6 faces, numeradas de 1 a 6, sem ver o resultado, você é informado de que a soma dos números observados na face superior de cada dado é igual a 9. Determine a probabilidade de o número observado em cada uma dessas faces ser um número ímpar.

8 **ESPM 2018** Estima-se que a probabilidade de um time de futebol repetir sua performance na temporada seguinte à atual é igual a $\frac{2}{5}$. Se nesta temporada esse time for campeão, a probabilidade de ele ser campeão daqui a duas temporadas é:

A $\frac{4}{25}$ B $\frac{8}{25}$ C $\frac{12}{25}$ D $\frac{13}{25}$ E $\frac{2}{5}$

9 **Uerj 2019** Um menino vai retirar ao acaso um único cartão de um conjunto de sete cartões. Em cada um deles está escrito apenas um dia da semana, sem repetições: segunda, terça, quarta, quinta, sexta, sábado, domingo. O menino gostaria de retirar sábado ou domingo.
A probabilidade de ocorrência de uma das preferências do menino é:

A $\frac{1}{49}$ B $\frac{2}{49}$ C $\frac{1}{7}$ D $\frac{2}{7}$

10 **ESPM 2018** A senha bancária da dona Maria era 753213 seguida pelas letras D, D e B, nessa ordem. Acontece que ela só se lembrava da parte numérica, esquecendo-se completamente da sequência de letras. A caixa eletrônica apresentou os 4 botões mostrados na figura abaixo, que ela deveria pressionar exatamente 3 vezes, podendo repeti-los, um para cada letra da senha.

CDE
Se ela fizer as escolhas aleatoriamente, a probabilidade de acertar a senha será:

A $\frac{9}{32}$ B $\frac{5}{16}$ C $\frac{1}{4}$ D $\frac{3}{8}$ E $\frac{3}{16}$

11 **Uerj 2018** Um jogo consiste em lançar cinco vezes um dado cúbico, cujas faces são numeradas de 1 a 6, cada uma com a mesma probabilidade de ocorrer. Um jogador é considerado vencedor se obtiver pelo menos três resultados pares.
A probabilidade de um jogador vencer é:

A $\frac{3}{5}$ B $\frac{2}{3}$ C $\frac{1}{5}$ D $\frac{1}{2}$

12 **UFU 2018** As irmãs Ana e Beatriz e seus respectivos namorados vão sentar-se em um banco de jardim (figura) de modo que cada namorado fique ao lado de sua namorada.

A probabilidade de as irmãs sentarem-se uma ao lado da outra é igual a

A 0,25 B 0,33 C 0,45 D 0,50

13 No lançamento de uma moeda quatro vezes sucessivas, qual a probabilidade de se obter:

a) somente coroas?
b) no mínimo uma cara?
c) no máximo duas coroas?
d) duas caras e duas coroas?
e) cara nos dois primeiros lançamentos?

14 Sorteia-se ao acaso uma letra da palavra “caderno”. Qual a probabilidade de se obter:

a) vogal? b) consoante?

15 **FGV 2020** Uma urna contém 4 bolinhas numeradas com os números 1, 3, 5 e 7. Uma bolinha é sorteada ao acaso, tem seu número observado e é recolocada na urna. Em seguida, uma segunda bolinha é sorteada ao acaso. Considere as seguintes probabilidades:

- p_1: probabilidade de que o número da 1ª bolinha esteja entre 4 e 6, excluindo 4 e 6.
- p_M: probabilidade de que a média aritmética dos dois números sorteados esteja entre 4 e 6, excluindo 4 e 6.

O valor de $p_1 + p_M$ é:

A $\frac{8}{16}$ B $\frac{6}{16}$ C $\frac{7}{16}$ D $\frac{5}{16}$ E $\frac{9}{16}$

16 **EsPCEx 2020** Numa sala existem duas caixas com bolas amarelas e verdes. Na caixa 1, há 3 bolas amarelas e 7 bolas verdes. Na caixa 2, há 5 bolas amarelas e 5 bolas verdes. De forma aleatória, uma bola é extraída da caixa 1, sem que se saiba a sua cor, e é colocada na caixa 2. Após esse procedimento, a probabilidade de extrair uma bola amarela da caixa 2 é igual a:

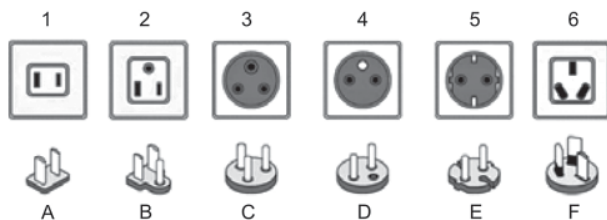
A $\frac{49}{110}$ B $\frac{51}{110}$ C $\frac{53}{110}$ D $\frac{57}{110}$ E $\frac{61}{110}$

17 **IME 2020** Considere os conjuntos $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Seja F o conjunto de funções cujo domínio é A e cujo contradomínio é B. Escolhendo-se ao acaso uma função f de F, a probabilidade de f ser estritamente crescente ou ser injetora é:

A 0,00252
B 0,00462
C 0,25200
D 0,30240
E 0,55440

18 **Unifesp 2020** A figura indica seis tipos de tomadas e os pinos projetados para nelas se encaixarem (1-A, 2-B, 3-C, 4-D, 5-E e 6-F).

Além dessa correspondência, sabe-se que:

- O pino A também se encaixa na tomada 2.
- O pino D também se encaixa nas tomadas 3 e 5.
- O pino E também se encaixa nas tomadas 3 e 4.

a) Sorteando-se aleatoriamente um tipo de pino e um tipo de tomada, qual é a probabilidade de que o encaixe entre eles possa ser feito?
b) Sorteando-se aleatoriamente dois tipos de tomadas e dois tipos de pinos, qual é a probabilidade de que seja possível conectar um deles a uma tomada e o outro a outra?

19 **Famema 2020** Uma confecção de roupas produziu um lote com um total de 150 camisetas, distribuídas entre os tamanhos P e M, sendo 59 lisas e as demais estampadas. Nesse lote, havia 100 camisetas tamanho P, das quais 67 eram estampadas. Retirando-se, ao acaso, uma camiseta desse lote e sabendo que seu tamanho é M, a probabilidade de que seja uma peça estampada é igual a:

A 36%
B 24%
C 48%
D 60%
E 72%

20 **Fuvest 2020** Um jogo educativo possui 16 peças nos formatos: círculo, triângulo, quadrado e estrela, e cada formato é apresentado em 4 cores: amarelo, branco, laranja e verde. Dois jogadores distribuem entre si quantidades iguais dessas peças, de forma aleatória. O conjunto de 8 peças que cada jogador recebe é chamado de coleção.

a) Quantas são as possíveis coleções que um jogador pode receber?
b) Qual é a probabilidade de que os dois jogadores recebam a mesma quantidade de peças amarelas?
c) A regra do jogo estabelece pontuações para as peças, da seguinte forma: círculo = 1 ponto, triângulo = 2 pontos, quadrado = 3 pontos e estrela = = 4 pontos. Quantas são as possíveis coleções que valem 26 pontos ou mais?

21 **UFPR 2020** Uma adaptação do Teorema do Macaco afirma que um macaco digitando aleatoriamente num teclado de computador, mais cedo ou mais tarde, escreverá a obra “Os Sertões” de Euclides da Cunha. Imagine que um macaco digite sequências aleatórias de 3 letras em um teclado que tem apenas as seguintes letras: S, E, R, T, O. Qual é a probabilidade de esse macaco escrever a palavra “SER” na primeira tentativa?

A $\frac{1}{5}$
B $\frac{1}{25}$
C $\frac{1}{75}$
D $\frac{1}{125}$
E $\frac{1}{225}$

22 **EPCar 2020** Cada questão desta prova consta de quatro alternativas, das quais apenas uma é correta. Considere que um candidato sabe 60% da matéria da prova. Quando esse candidato sabe uma questão, ele a acerta, e quando não sabe, ele escolhe qualquer resposta, ao acaso.
Considere, ainda, que esse candidato acertou uma questão. A probabilidade de que tenha sido por acaso é um número que pode ser escrito na forma de uma fração irredutível $\frac{p}{q}$.

A soma dos números *p* e *q* é igual a

A 8
B 9
C 10
D 11

23 **UFMS 2020** Em uma pequena propriedade rural da cidade de Aquidauana, há três raças de gado de corte: Nelore, Girolando e Pantaneira. O rebanho é composto por 40 cabeças, sendo 25 cabeças da raça Nelore, 10 da raça Girolando e 5 da raça Pantaneira. Para uma exposição agropecuária, serão enviadas 3 cabeças. Escolhendo ao acaso, qual a probabilidade de as três cabeças escolhidas para a exposição serem da raça Girolando?

A $\frac{1}{4}$
B $\frac{1}{998}$
C $\frac{3}{247}$
D $\frac{3}{40}$
E $\frac{203}{494}$

24 **FEI-SP** Jogando-se dois dados, qual a probabilidade de que a soma dos pontos obtidos seja quatro ou cinco?

25 **UFMG** Dados:

$P(A) = \frac{1}{5}$ e $P(B) = \frac{2}{3}$, calcular $P(\overline{A})$ e $P(\overline{B})$.

26 Dois atiradores, M e N, estão treinando. Sabe-se que, quando M atira, tem probabilidade $\frac{3}{4}$ de acertar e N, quando atira, tem probabilidade $\frac{5}{6}$ de acertar. Quando cada um deles dá um único tiro, pergunta-se:

a) Qual é a probabilidade de M errar?
b) Qual é a probabilidade de N errar?
c) Qual é a probabilidade de que ambos errem?
d) Qual é a probabilidade de um errar e o outro acertar?
e) Qual é a probabilidade de que o alvo seja atingido, isto é, pelo menos um acertar o alvo?

27 Em uma urna, há 5 bolas azuis e 7 verdes, num total de 12 bolas. Retirando-se 5 bolas ao acaso, sucessivamente e sem reposição, pergunta-se:

a) Qual é a probabilidade de sair 3 bolas azuis e 2 verdes?
b) Qual é a probabilidade de sair 2 bolas verdes e 3 azuis, nesta ordem?
c) Qual é a probabilidade de que se obtenha todas bolas verdes?
d) Qual é a probabilidade de obter-se pelo menos 1 bola azul?

28 Em uma fábrica, a máquina X produz 35% do total da produção; a máquina Y, 40% e a máquina Z os restantes 25%. Da produção de X, 2% apresentam defeito; da produção de Y, 1,5% apresenta defeito, e da produção de A 0,8% apresenta defeito. Em um dia em que a produção total das 3 máquinas foi de 20 000 peças, uma delas foi tirada ao acaso e verificou-se que era defeituosa. Qual a probabilidade de que essa peça tenha sido produzida na máquina X?

29 Dados os eventos A e B de um espaço amostral E, sabe-se que: $P(A \mid B) = \frac{3}{5}$; $P(B) = \frac{11}{20}$ e $P(B \mid A) = \frac{7}{3}$.

Pergunta-se:

a) Quanto vale $P(A \cap B)$?
b) Esses eventos são independentes?
c) Esses eventos são mutuamente exclusivos?

30 As probabilidades de 3 alunos A, B e C resolverem, separadamente, um determinado problema são, respectivamente, 40%, 50% e 60%. Qual a probabilidade de o problema ser resolvido?

31 Dispomos de três urnas, A, B e C, com as seguintes composições.
A – 4 bolas vermelhas e 2 pretas.
B – 5 bolas vermelhas, 3 brancas e 4 pretas.
C – 6 bolas pretas e 5 brancas.
Retira-se uma bola de A e coloca-se na urna B; a seguir, retira-se uma bola de B e coloca-se em C. Retirando-se uma bola de C, qual é a probabilidade desta ser vermelha ou branca?

32 A probabilidade de um atirador acertar um alvo é $\frac{1}{3}$ e a de um atirador B acertar o mesmo alvo é $\frac{1}{5}$. Se cada um atira uma vez, pergunta-se:

a) Qual é a probabilidade de o alvo ser atingido?
b) Se o alvo foi atingido apenas uma vez, qual é a probabilidade de ter sido pelo atirador B?

33 **Cescem** De um total de 100 alunos que se destinam aos cursos de Matemática, Física e Química, sabe se que:

1. 30 destinam-se à Matemática, e, destes, 20 são do sexo masculino.
2. o total de alunos do sexo masculino é 50, dos quais 10 destinam-se à Química.
3. existem 10 moças que se destinam ao curso de Química.

Nessas condições, sorteando-se um aluno ao acaso do grupo total e sabendo-se que é do sexo feminino, a probabilidade de que ele se destine ao curso de Matemática vale:

A $\frac{1}{5}$ B $\frac{1}{4}$ C $\frac{1}{3}$ D $\frac{1}{2}$ E 1

34 **Cescem** Dois indivíduos, A e B, vão jogar cara ou coroa com uma moeda honesta. Eles combinam lançar a moeda 5 vezes e ganha o jogo aquele que ganhar em 3 ou mais lançamentos. Cada um aposta 28 reais. Feitos os dois primeiros lançamentos, em ambos dos quais A vence, eles resolvem encerrar o jogo. Do ponto de vista probabilístico, de que forma devem ser repartidos os 56 reais?

A Metade para cada um.
B 42 para A e 14 para B.
C 49 para A e 7 para B.
D Tudo para A.
E Nenhuma das anteriores.

35 Se em determinado dia a probabilidade de chover é $\frac{1}{4}$, qual é a probabilidade de que não chova nesse dia?

36 Se a probabilidade de um atirador acertar um alvo é $\frac{4}{7}$, qual é a probabilidade de ele errar o alvo?

37 Calcule a probabilidade de um boxeador vencer uma luta, sabendo-se que suas chances são de quatro para um.

38 Uma caixa contém vinte bolas, das quais doze são brancas, cinco são pretas e três são amarelas. Retira-se uma bola ao acaso. Qual a probabilidade de:

a) ser amarela?
b) ser preta?
c) não ser amarela?
d) não ser preta?
e) não ser branca?

39 Uma urna tem quinze bolas, das quais seis são brancas e nove são pretas. Retiradas duas bolas aleatoriamente, qual a probabilidade de se obter:

a) duas bolas pretas?
b) pelo menos uma bola branca?

40 Seja E o evento: "retirada de uma carta com figura de um baralho de 52 cartas". Calcule P(E) e $P(\overline{E})$.

41 Sejam as seis permutações, sem repetição, que se podem formar com os algarismos 3, 4 e 5. Escolhe-se uma permutação ao acaso. Calcule a probabilidade de se obter:

a) um número maior que 400.
b) um número ímpar.
c) um número par.

42 **EEM** Uma urna contém dez bolas brancas, oito vermelhas e seis pretas, todas iguais e indistinguíveis ao tato. Retirando-se uma bola ao acaso, qual a probabilidade de não ser preta?

43 Sorteado ao acaso um número do conjunto {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}, qual a probabilidade de ele ser número múltiplo de 4, sabendo que é par?

44 Jogando-se dois dados, verifica-se que a soma dos números é 7. Qual é a probabilidade de sair o número 3 em um desses dados?

45 De um baralho de 52 cartas, escolhe-se uma carta aleatoriamente. Sabendo que a carta escolhida é de copas, qual a probabilidade de ser:

a) uma dama?
b) uma figura?

46 Jogando-se dois dados, verifica-se que a diferença é três. Qual a probabilidade de sair o número cinco em um dos dados?

47 Durante um dia de eleição, trezentas pessoas foram pesquisadas sobre o candidato em que votaram. O resultado da pesquisa está no seguinte quadro.

	Candidato A	Candidato B	Candidato C
Homem	80	60	10
Mulher	50	75	25

Escolhendo uma pessoa aleatoriamente, qual a probabilidade de:

a) a pessoa escolhida ser mulher?
b) a pessoa escolhida ser homem, sabendo-se que ela votou no candidato B?
c) a pessoa ter votado no candidato A, sabendo que é mulher?

48 No lançamento de dois dados, calcule a probabilidade de, em um dos dados, aparecer o número quatro, sendo que a soma é seis.

49 Um número do conjunto U = {1, 2, 3, 4, ... , 24} é escolhido ao acaso. Sabe-se que ele é múltiplo de quatro. Qual a probabilidade de ser também múltiplo de seis?

50 Qual a probabilidade de se obter dois reis, quando se extrai duas cartas sucessivamente de um baralho com 52 cartas?

51 Uma carta é retirada aleatoriamente de um baralho com 52 cartas. Qual a probabilidade de ser um rei, dado que a carta retirada é uma figura?

52 Uma urna contém sete bolas vermelhas e três brancas. Três bolas são retiradas, uma após a outra, sem reposição. Qual a probabilidade de as duas primeiras serem vermelhas e de a terceira ser branca?

53 No lançamento de um dado e de uma moeda, qual a probabilidade de se obter coroa e número maior que quatro?

54 Uma urna contém quatro bolas brancas e cinco bolas pretas. Qual a probabilidade de se retirar uma bola branca e uma bola preta, sem reposição da primeira?

55 Um casal tem três filhos. Qual a probabilidade de serem, nessa ordem, do sexo feminino, masculino e feminino?

56 Uma urna contém oito bolas pretas e duas bolas brancas. A probabilidade de se retirar uma bola branca é:

A $\frac{2}{8}$ C 0,2 E n. d. a.
B 0,8 D 1

57 Jogando-se dois dados, a probabilidade de a soma dos números ser maior que 8 é:

A $\frac{1}{2}$ C $\frac{4}{3}$ E n.d.a.
B $\frac{5}{9}$ D $\frac{5}{18}$

58 **Unisa** A probabilidade de uma bola branca aparecer ao se retirar uma única bola de uma urna contendo quatro bolas brancas, três vermelhas e cinco azuis é:

A $\frac{1}{3}$ C $\frac{1}{4}$ E n.d.a.
B $\frac{1}{2}$ D $\frac{1}{12}$

59 **Cesgranrio** Os 240 cartões de um conjunto são numerados, consecutivamente, de 1 a 240. Retirando-se ao acaso um cartão desse conjunto, a probabilidade de se obter um cartão numerado com um múltiplo de 13 é:

A $\frac{13}{240}$ B $\frac{3}{40}$ C $\frac{1}{26}$ D $\frac{1}{13}$ E $\frac{1}{6}$

60 **Fuvest** Escolhem-se ao acaso dois números naturais distintos, de 1 a 20. Qual é a probabilidade de que o produto dos números escolhidos seja ímpar?

A $\frac{9}{38}$ B $\frac{1}{2}$ C $\frac{9}{20}$ D $\frac{1}{4}$ E $\frac{8}{25}$

61 **Cesgranrio** Sete lâmpadas de neon são dispostas formando um "oito", como no mostrador de uma calculadora (fig. I) e podem ser acesas independentemente umas das outras. Estando todas as sete apagadas, acendem-se quatro delas ao mesmo tempo.

I

II

A probabilidade de ser formado o algarismo 4, como aparece na figura II, é:

A $\frac{1}{35}$ B $\frac{1}{2}$ C $\frac{1}{3}$ D $\frac{1}{5}$ E $\frac{1}{28}$

62 **PUC-SP** Gira-se o ponteiro de um relógio (ver a figura) e anota-se o número que ele aponta ao passar. Repete se a operação.

Qual a probabilidade de que a soma dos dois números obtidos seja 5?

A $\frac{5}{36}$ B $\frac{8}{36}$ C $\frac{12}{36}$ D $\frac{24}{36}$ E $\frac{35}{36}$

63 A probabilidade de obter-se uma soma de pontos igual a seis ou oito, no lançamento de dois dados é:

A $\frac{11}{36}$ C $\frac{13}{36}$ E n.d.a.
B $\frac{1}{6}$ D $\frac{5}{18}$

64 Retira-se aleatoriamente uma carta de um baralho. A probabilidade de que seja uma figura ou uma carta de paus é:

A $\frac{25}{52}$ C $\frac{11}{26}$ E n.d.a.
B $\frac{4}{52}$ D $\frac{15}{26}$

65 Dê o espaço amostral para os experimentos aleatórios a seguir.

a) Três pessoas, A, B e C, são colocadas em uma fila e observa-se a disposição das mesmas.
b) De um baralho de 52 cartas, uma é extraída e observada.
c) Um casal planeja ter filhos. Descreva a sequência de sexos dos 3 filhos.
d) Entre 5 pessoas, A, B, C, D e E, duas são escolhidas para formarem uma comissão. Observam-se os elementos dessa comissão.

66 Uma urna contém 30 bolinhas numeradas de 1 a 30. Uma bolinha é escolhida e observado o seu número. Descreva os seguintes eventos.

a) O número obtido é par.
b) O número obtido é ímpar.
c) O número obtido é primo.
d) O número obtido é maior que 16.
e) O número é múltiplo de 2 e de 5.
f) O número é múltiplo de 3 ou de 8.
g) O número não é múltiplo de 6.

67 Uma moeda e um dado são lançados. Considere o espaço amostral: E = {(K, 1), (K, 2), (K, 3), (K, 4), (K, 5), (K, 6), (C, 1), (C, 2), (C, 3), (C, 4), (C, 5), (C, 6)}. Descreva os eventos:

a) A: ocorre cara.
b) B: ocorre número par.
c) C: ocorre o número 3.
d) $A \cup B$
e) $B \cap C$
f) $A \cap C$
g) $\overline{A}$
h) $\overline{C}$

68 De um baralho de 52 cartas, uma é extraída ao acaso. Qual a probabilidade de cada um dos eventos abaixo?

a) Ocorre dama de copas.
b) Ocorre dama.
c) Ocorre carta de naipe "paus".
d) Ocorre dama ou rei ou valete.
e) Ocorre uma carta que não é um rei.

69 Uma urna contém 6 bolas pretas, 2 bolas brancas e 10 amarelas. Uma bola é escolhida ao acaso. Qual a probabilidade:

a) de a bola não ser amarela?
b) de a bola ser branca ou preta?
c) de a bola não ser branca nem amarela?

70 Em uma cidade, 30% dos homens são casados, 40% são solteiros, 20% são desquitados e 10% são viúvos. Um homem é escolhido ao acaso. Qual o probabilidade de ele ser:

a) solteiro?
b) não ser casado?
c) ser solteiro ou desquitado?

71 Uma moeda é lançada 3 vezes. Qual a probabilidade de observarmos:

a) 3 coroas?
b) exatamente uma coroa?
c) pelos menos uma cara?
d) nenhuma coroa?
e) no máximo 2 caras?

72 Oito pessoas (entre elas Pedro e Sílvia) são dispostas ao acaso em uma fila. Qual a probabilidade de:

a) Pedro e Sílvia ficarem juntos?
b) Pedro e Sílvia ficarem separados?

73 Uma urna contém 5 bolas vermelhas, 3 brancas e 2 pretas. Duas bolas são extraídas ao acaso e com reposição. Qual a probabilidade de:

a) ambas serem vermelhas?
b) nenhuma ser branca?
c) nenhuma ser preta?

74 Um grupo é constituído de 6 homens e 4 mulheres. Três pessoas são selecionadas ao acaso, sem reposição. Qual a probabilidade de que ao menos duas sejam homens?

75 Jogando-se 3 dados, qual a probabilidade de obtermos soma menor ou igual a 4?

A $\frac{1}{36}$
B $\frac{1}{2}$
C $\frac{5}{27}$
D $\frac{1}{18}$
E $\frac{1}{54}$

76 Tirando-se, ao acaso, 5 cartas de um baralho de 52 cartas, a probabilidade de sair exatamente 3 valetes é:

A $\frac{4}{52}$
B $\frac{4 \cdot C_{48,2}}{C_{52,5}}$
C $\frac{4 \cdot C_{52,2}}{C_{52,5}}$
D $\frac{3}{52}$
E n.d.a.

77 Em um grupo de 500 estudantes, 80 estudam Engenharia, 150 estudam Economia e 10 estudam Engenharia e Economia. Se um aluno é escolhido ao acaso, qual a probabilidade de que:

a) ele estude Engenharia e Economia?
b) ele estude somente Engenharia?
c) ele estude somente Economia?
d) ele não estude Engenharia nem Economia?
e) ele estude Engenharia ou Economia?

78 Com os dígitos 1, 2, 3, 4 e 5 são formados números de 4 algarismos distintos. Um deles é escolhido ao acaso. Qual a probabilidade de ele ser:

a) par?
b) ímpar?

79 **Fuvest** Uma urna contém bolas numeradas de 1 a 9. Sorteiam-se, com reposição, duas bolas. A probabilidade de que o número da segunda bola seja estritamente maior do que a primeira é:

A $\frac{72}{81}$
B $\frac{1}{9}$
C $\frac{36}{81}$
D $\frac{30}{81}$
E $\frac{45}{81}$

80 De um baralho de 52 cartas, três são extraídas ao acaso, sem reposição. Qual a probabilidade de que as três sejam do **mesmo** naipe?

81 De um baralho de 52 cartas, duas são selecionadas ao acaso e sem reposição. Qual a probabilidade de que seus naipes sejam **diferentes**?

82 De um lote de 200 peças, sendo 180 boas e 20 defeituosas, 10 peças são selecionadas ao acaso, sem repetição. Qual a probabilidade de:

a) as 10 peças serem boas?
b) as 10 peças serem defeituosas?
c) 5 serem boas e 5 serem defeituosas?

83 Um lote contém 60 lâmpadas, sendo 50 boas e 10 defeituosas. Cinco lâmpadas são escolhidas ao acaso, sem reposição. Qual a probabilidade de:

a) todas serem boas?
b) todas serem defeituosas?
c) 2 serem boas e 3 serem defeituosas?
d) pelo menos 1 ser defeituosa?

84 Uma urna contém 3 bolas brancas, 2 vermelhas e 5 azuis. Uma bola é escolhida ao acaso da urna. Qual a probabilidade de a bola escolhida ser:

a) branca? b) vermelha? c) azul?

85 Dois dados, um verde e um vermelho, são lançados e observados os números das faces de cima.

a) Qual a probabilidade de ocorrerem números iguais?
b) Qual a probabilidade de ocorrerem números diferentes?
c) Qual a probabilidade de a soma dos números ser 7?
d) Qual a probabilidade de a soma dos números ser 12?
e) Qual a probabilidade de a soma dos números ser menor ou igual a 12?
f) Qual a probabilidade de aparecer o número 3 em ao menos um dado?

86 Um colégio tem 1000 alunos. Destes: 200 estudam Matemática; 180 estudam Física; 200 estudam Química; 20 estudam as três matérias; 50 estudam Matemática e Física; 50 estudam Física e Química; 70 estudam somente Química. Um aluno do colégio é escolhido ao acaso. Qual a probabilidade de:

a) ele estudar só Matemática?
b) ele estudar só Física?
c) ele estudar Matemática e Química?

87 Nove livros são colocados ao acaso em uma estante. Qual a probabilidade de que 3 livros determinados fiquem juntos?

88 Entre 10 me ninos, 4 têm olhos azuis. Três meninas são escolhidas ao acaso, sem reposição. Qual a probabilidade de pelo menos duas terem olhos azuis?

89 De um baralho de 52 cartas, 5 são extraídas ao acaso, sem reposição. Qual a probabilidade de:

a) saírem os 4 reis?
b) não sair nenhum rei?
c) sair ao menos um rei?

90 Um dado é viciado, de modo que a probabilidade de observarmos um número na face de cima é proporcional a esse número. Calcule a probabilidade de:

a) ocorrer número par.
b) ocorrer número maior ou igual a 5.

91 Um homem encontra-se na origem de um sistema cartesiano ortogonal. Ele só pode andar uma unidade de cada vez, para cima ou para direita. Se ele andar 10 unidades, qual a probabilidade de chegar no ponto P(7, 3)?

Texto complementar

Coincidência de aniversários

Seja E um conjunto de *n* pessoas e F o conjunto dos dias do ano, não bissexto; ou seja, F = {1, 2, 3 ..., 364, 365}.

Vamos criar uma função que associa E a F, relacionando uma pessoa com o dia do seu aniversário.

Seja B o conjunto das funções injetoras de E em F e A o conjunto das funções não injetoras de E em F. O conjunto A representa as coincidências de aniversários e B as não coincidências. O número de funções de E com F é (365)n. O número de elementos de B é o arranjo simples de 365, *n* a *n*:

$n(B) = 365.364 \cdot ... \cdot (365 - n + 1)$

$n(A) = (365)^n - n(B)$

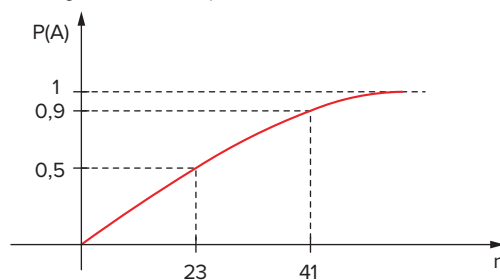
A probabilidade de B, sendo (365)n o conjunto Universo, é:

$$P(B) = \frac{n(B)}{(365)^n} = \frac{365 \cdot 364 \cdot ... \cdot (365 - n + 1)}{(365)^n},$$

que representa a probabilidade de não haver coincidência de aniversários.

A probabilidade das coincidências é P(A) = 1 – P(B), assim:

$$P(A) = 1 \quad \frac{365 \cdot 364 \cdot ... \cdot (365 - n + 1)}{(365)^n}$$

Fazendo um gráfico, temos, aproximadamente:

Com 23 alunos em uma sala, temos 50% de chance de coincidência de aniversários, e 90% com 41 alunos.

Teremos 100% de chance para um grupo de 367 pessoas (contando com a possibilidade de aniversário em 29 de fevereiro, em um ano bissexto).

Resumindo

A teoria das probabilidades desenvolve-se sobre algumas definições importantes. Além dessas definições, todos os conhecimentos na área da análise combinatória podem ser aplicados.

Definição de probabilidade

Assim, a probabilidade de certo acontecimento A, associado a uma experiência aleatória, cujo espaço amostral é S, com $A \subset S$, é dada por:

$$P(A) = \frac{n^{\underline{o}} \text{ de casos favoráveis a A}}{n^{\underline{o}} \text{ de casos possíveis}}$$

Sejam A e B acontecimentos quaisquer de S, então:

1. $P(A) + P(\overline{A}) = 1$, $\overline{A}$ é o evento complementar de A.
2. A e B são conjuntos disjuntos, ou seja, $A \cap B = \varnothing$; então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
3. $P(S) = 1$
4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad P(A \cap B)$

Quer saber mais?

Livro

- **ROSS, Sheldon**. *Probabilidade*: um curso moderno com aplicações. 8. ed. Porto Alegre: Artmed, 2010.

Site

- Trocar ou não de porta?
  Disponível em: <https://cienciahoje.org.br/artigo/trocar-ou-nao-de-porta/>.

Filme

- **Quero ficar com Polly**. Direção: John Hamburg. EUA, 2004.

Exercícios complementares

1 UEG 2019 Em um programa de televisão, será sorteado um dos participantes para executar determinada tarefa. Sabe-se que, entre os participantes, 4 são homens, 6 são mulheres e uma mulher recebeu imunidade e não poderá participar do sorteio. Colocando-se os nomes dos participantes que serão sorteados em uma urna e retirando-se um deles ao acaso, a probabilidade de que seja uma mulher é de:

A $\frac{1}{2}$ B $\frac{1}{5}$ C $\frac{3}{5}$ D $\frac{1}{9}$ E $\frac{5}{9}$

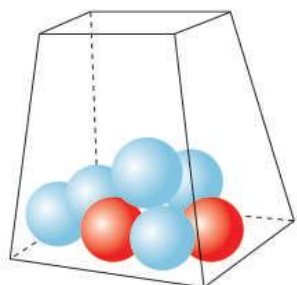
2 Unisa O número da chapa de um carro é par. A probabilidade de o algarismo das unidades ser zero é:

A $\frac{1}{10}$ B $\frac{1}{2}$ C $\frac{4}{9}$ D $\frac{5}{9}$ E $\frac{1}{5}$

3 Enem 2019 Em um determinado ano, os computadores da receita federal de um país identificaram como inconsistentes 20% das declarações de imposto de renda que lhe foram encaminhadas. Uma declaração é classificada como inconsistente quando apresenta algum tipo de erro ou conflito nas informações prestadas. Essas declarações consideradas inconsistentes foram analisadas pelos auditores, que constataram que 25% delas eram fraudulentas. Constatou-se ainda que, dentre as declarações que não apresentaram inconsistências, 6,25% eram fraudulentas.

Qual é a probabilidade de, nesse ano, a declaração de um contribuinte ser considerada inconsistente, dado que ela era fraudulenta?

A 0,0500
B 0,1000
C 0,1125
D 0,3125
E 0,5000

4 **Uerj 2019** Em uma urna há sete bolinhas, sendo duas delas vermelhas e cinco azuis. Quatro do total de bolinhas serão sorteadas ao acaso.

Calcule a probabilidade de pelo menos uma das boli nhas sorteadas ser vermelha.

5 **FMU** Uma urna contém cinco bolas vermelhas e quatro pretas; dela, são retiradas duas bolas, uma após a outra, sem reposição. A primeira bola retirada é de cor preta. A probabilidade de a segunda bola ser vermelha é:

A $\frac{4}{9}$ B $\frac{5}{3}$ C $\frac{4}{5}$ D $\frac{5}{8}$ E $\frac{1}{2}$

6 **Enem 2019** Uma locadora possui disponíveis 120 veí culos da categoria que um cliente pretende locar. Desses, 20% são da cor branca, 40% são da cor cinza, 16 veículos são da cor vermelha e o restante, de outras cores. O cliente não gosta da cor vermelha e ficaria contente com qualquer outra cor, mas o sistema de controle disponibiliza os veículos sem levar em conta a escolha da cor pelo cliente.
Disponibilizando aleatoriamente, qual é a probabilidade de o cliente ficar contente com a cor do veículo?

A $\frac{16}{120}$ B $\frac{32}{120}$ C $\frac{72}{120}$ D $\frac{101}{120}$ E $\frac{104}{120}$

7 **Fuvest** Seis pessoas, A, B, C, D, E e F, vão atravessar um rio em três barcos. Distribuindo-se ao acaso as pessoas, de modo que fiquem duas em cada barco, a probabilidade de A atravessar junto com B, C junto com D e E junto com F é:

A $\frac{1}{5}$ B $\frac{1}{10}$ C $\frac{1}{15}$ D $\frac{1}{20}$ E $\frac{1}{25}$

8 **IME 2019** Em um jogo de RPG "Role-Playing Game" em que os jogadores lançam um par de dados para determinar a vitória ou a derrota quando se confrontam em duelos, os dados são icosaedros regulares com faces numeradas de 1 a 20. Vence quem soma mais pontos na rolagem dos dados e, em caso de empate, os dois perdem.
Em um confronto, seu adversário somou 35 pontos na rolagem de dados. É sua vez de rolar os dados. Qual sua chance de vencer este duelo?

A $\frac{1}{2}$ B $\frac{3}{76}$ C $\frac{9}{400}$ D $\frac{1}{80}$ E $\frac{3}{80}$

9 **UEL 2019** O filme Jumanji (1995) é uma obra de ficção que retrata a história de um jogo de tabuleiro mágico que empresta seu nome ao longa-metragem. O jogo é composto de dois dados distinguíveis de 6 lados, um tabuleiro com um visor de cristal no centro e peças que representam cada jogador. No filme, Alan Parrish é um garoto que encontra o jogo em um local de construção e o leva para casa. Assim que chega, Alan convida Sarah Whittle, uma garota da vizinhança, para jogar. Quando Alan lança os dados, aparece no visor a seguinte mensagem:

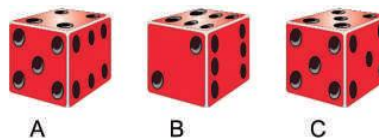
Alan então é sugado pelo visor de cristal e transportado magicamente até a selva de Jumanji. Supondo que os dois dados do jogo sejam independentes e honestos, assinale a alternativa que apresenta, corretamente, a probabilidade de algum jogador lançar os dois dados e obter a soma de 5 ou 8, de modo a tirar Alan da selva:

A 15%
B 22%
C 25%
D 62%
E E66%

10 **Unifesp 2019** A imagem ilustra três dados, A, B e C. O dado A é convencional, o dado B tem duas faces numeradas com 2 e quatro faces numeradas com 6, e o dado C possui as seis faces numeradas com 5. As faces de cada dado são equiprováveis:

A

B

C

a) Calcule a probabilidade de que a soma dos números obtidos em um lançamento dos três dados seja múltiplo de 3.
b) Considere que dois dos três dados sejam sorteados ao acaso e que, em seguida, os dados sorteados sejam lançados ao acaso. Qual a probabilidade de que a soma dos números obtidos no lançamento seja um múltiplo de três?

11 **Efomm 2019** Considere uma urna contendo cinco bolas brancas, duas pretas e três verdes. Suponha que três bolas sejam retiradas da urna, de forma aleatória e sem reposição. Em valores aproximados, qual é a probabilidade de que as três bolas retiradas tenham a mesma cor?

A 7,44%
B 8,33%
C 9,17%
D 15,95%
E 27,51%

12 **Enem 2019** O dono de um restaurante situado às margens de uma rodovia percebeu que, ao colocar uma placa de propaganda de seu restaurante ao longo da rodovia, as vendas aumentaram. Pesquisou junto aos seus clientes e concluiu que a probabilidade de um motorista perceber uma placa de anúncio é $\frac{1}{2}$. Com isso, após autorização do órgão competente, decidiu instalar novas placas com anúncios de seu restaurante ao longo dessa rodovia, de maneira que a probabilidade de um motorista perceber, pelo menos uma das placas instaladas, fosse superior a $\frac{99}{100}$.

A quantidade mínima de novas placas de propaganda a serem instaladas é:

A 99 B 51 C 50 D 6 E 1

13 **UEG 2019** Dois candidatos, A e B, disputam a presidência de uma empresa. A probabilidade de o candidato A vencer é de 0,70; ao passo que a de B vencer é de 0,30. Se o candidato A vencer essa disputa, a probabilidade de Heloísa ser promovida a diretora dessa empresa é de 0,80; já se o candidato B vencer, essa probabilidade será de 0,30. A probabilidade de Heloísa, após a disputa da presidência dessa empresa, ser promovida a diretora, é de

A 0,50
B 0,45
C 0,65
D 0,56
E 0,55

14 **FICSAE 2019** Considere um bando de pássaros de determinada espécie, no qual cabe ao macho conquistar a fêmea para formar um casal. Enquanto a maioria dos pássaros machos dessa espécie canta e dá pequenos saltos, alguns conseguem dar saltos maiores, atraindo mais a atenção das fêmeas. Com isso, estima-se que a chance dos pássaros que realizam maiores saltos conseguirem uma parceira é igual a 30%, enquanto a chance dos demais pássaros machos dessa espécie é igual a 10%.

Sabendo-se que nesse bando há 150 pássaros machos, dos quais 30 conseguem dar saltos maiores, ao observar um casal recém-formado, a probabilidade e o pássaro macho ser capaz de dar saltos maiores é:

A $\frac{1}{3}$ B $\frac{3}{5}$ C $\frac{3}{50}$ D $\frac{3}{7}$ E $\frac{3}{20}$

15 **UFJF 2019** Em um hospital trabalham 12 médicos, dos quais 5 são cardiologistas. Um paciente apareceu com uma doença cardíaca rara. A direção do hospital resolveu montar um grupo de estudos composto por 3 médicos para analisar o caso.

a) Quantos grupos de estudos distintos com 3 médicos é possível montar para realizar o estudo?
b) Quantos grupos de estudos distintos com 3 médicos têm pelo menos um cardiologista?
c) Um grupo de estudos com 3 médicos será formado aleatoriamente para o estudo. Qual é a probabilidade de que tenha pelo menos um cardiologista em sua composição?

16 **UEG 2019** Uma urna possui 5 bolas verdes e 4 amarelas. São retiradas duas bolas aleatoriamente e sem reposição. A probabilidade de ter saído bolas de cores diferentes é

A $\frac{5}{9}$
B $\frac{5}{18}$
C $\frac{5}{12}$
D $\frac{9}{12}$
E $\frac{20}{17}$

17 **FMP 2019** Um médico está acompanhando um casal que deseja ter filhos. Segundo o médico, a esposa não tem chances de ter gêmeos, mas, se engravidar, a probabilidade de o neném ser do sexo masculino é de 40%. O casal deseja ter três nenéns e deseja que eles não sejam, todos, do mesmo sexo.

Confirmando-se o parecer do médico, a probabilidade de o casal conseguir o que deseja, ao final de três gravidezes bem-sucedidas, é

A 50%
B 66%
C 40%
D 72%
E 24%

18 **ESPM 2019** Uma urna contém 5 bolas idênticas numeradas de 1 a 5. Quatro bolas serão retiradas uma a uma, aleatoriamente, dessa urna e enfileiradas em uma canaleta da esquerda para a direita, na ordem de retirada, formando um número de 4 algarismos. A probabilidade de o algarismo das unidades ser o maior de todos os algarismos desse número é igual a:

A $\frac{1}{6}$
B $\frac{2}{3}$
C $\frac{1}{2}$
D $\frac{1}{4}$
E $\frac{1}{3}$

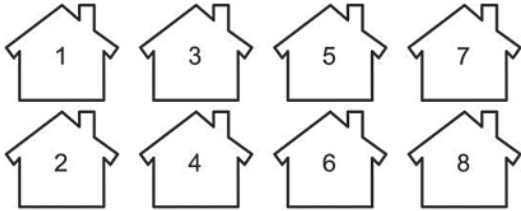
19 **UEL 2019** Considere as seguintes informações:

- Em um instituto de pesquisa trabalham 30 profissionais.
- Cada profissional tem apenas uma formação, ou em Biologia ou em Matemática.
- Parte do total destes profissionais fala inglês fluentemente.
- A quantidade de matemáticos fluentes em inglês é o dobro da quantidade de biólogos fluentes em inglês e representa 40% do total de profissionais.
- A quantidade de biólogos e matemáticos não fluentes em inglês é exatamente igual.

Na oportunidade de ser sorteado um profissional para representar o instituto de pesquisa em um evento, analise as sentenças a seguir e argumente sobre sua veracidade ou não.

I. A probabilidade de ser sorteado um profissional fluente em inglês é maior do que a probabilidade de ser sorteado um matemático.
II. A probabilidade de ser sorteado um profissional não fluente em inglês é igual à probabilidade de ser sorteado um biólogo.

Apresente os cálculos realizados na resolução da questão.

20 **UFPR 2019** Em uma reunião de condomínio, os moradores resolveram fazer um sorteio para decidir a ordem em que suas casas serão pintadas. As 8 casas desse condomínio estão dispostas conforme o esquema ao lado. Dizemos que duas casas são vizinhas quando estão dispostas de frente ou de lado. Por exemplo, a casa 3 é vizinha das casas 1, 4 e 5, enquanto a casa 8 é vizinha apenas das casas 6 e 7.

Qual é a probabilidade das duas primeiras casas sorteadas serem vizinhas?

A $\frac{5}{28}$
B $\frac{5}{32}$
C $\frac{5}{14}$
D $\frac{5}{16}$
E $\frac{9}{56}$

21 **Fuvest** Dois triângulos congruentes, com lados coloridos, são indistinguíveis se podem ser sobrepostos de tal modo que as cores dos lados coincidentes sejam as mesmas. Dados dois triângulos equiláteros congruentes, cada um de seus lados é pintado com uma cor escolhida dentre duas possíveis, com igual probabilidade. Qual a probabilidade de esses triângulos serem indistinguíveis?

22 **AFA 2019** Pela legislação brasileira, atualmente, os ditos "Jogos de Azar" estão proibidos. Tais jogos são, na maioria das vezes, sustentados pelas perdas dos jogadores que financiam os que vão ter sorte. Esses jogos têm por condição de existência que, na diferença entre as probabilidades de sorte e azar, predomine o azar.

Ainda que proibidos, bancas de alguns desses jogos são comumente encontradas em festas populares Brasil afora. Exemplo desses jogos é aquele em que o jogador tem 1 bolinha para lançar sobre uma rampa, levemente inclinada, e deverá acertar uma das "casinhas" numeradas de 1 a 6. Geralmente, o dono da banca de jogo impõe condições para que o jogador ganhe um prêmio.

Suponha que uma condição de sorte seja, desconsiderando quaisquer outras influências, lançar a bolinha três vezes sucessivas de modo que, ao final dos três lançamentos, seja observado que a soma dos números das casinhas é igual a 12.

Desse modo, a probabilidade de se ter sorte nesse jogo é:

A menor que 3%.
B maior que 8% e menor que 10%.
C maior que 11% e menor que 13%.
D superior a 13%.

23 **ITA 2019** As faces de dez moedas são numeradas de modo que: a primeira moeda tem faces 1 e 2; a segunda, 2 e 3; a terceira, 3 e 4, e assim sucessivamente até a décima moeda, com faces 10 e 11. As dez moedas são lançadas aleatoriamente e os números exibidos são somados. Então, a probabilidade de que essa soma seja igual a 60 é:

A $\frac{63}{128}$
B $\frac{63}{256}$
C $\frac{63}{512}$
D $\frac{189}{512}$
E $\frac{189}{1024}$

24 **Enem 2019** Uma empresa sorteia prêmios entre os funcionários como reconhecimento pelo tempo trabalhado. A tabela mostra a distribuição de frequência de 20 empregados dessa empresa que têm de 25 a 35 anos trabalhados. A empresa sorteou, entre esses empregados, uma viagem de uma semana, sendo dois deles escolhidos aleatoriamente.

Tempo de serviço	Número de empregados
25	4
27	1
29	2
30	2
32	3
34	5
35	3

Qual a probabilidade de que ambos os sorteados tenham 34 anos de trabalho?

A $\frac{1}{20}$
B $\frac{1}{19}$
C $\frac{1}{16}$
D $\frac{2}{20}$
E $\frac{5}{20}$

25 **Fuvest 2019** Uma urna tem A bolas azuis e B bolas brancas. Ao serem retiradas duas delas de uma só vez, aleatoriamente, a probabilidade de saírem duas bolas azuis é denotada por P_A, a probabilidade de saírem duas bolas brancas é denotada por P_B, e a probabilidade de saírem duas bolas de cores diferentes é denotada por P_M.

a) Se $A = 2$ e $B = 5$, determine P_B.
b) Se o total de bolas de urna é 21 e P_M é o triplo de P_A, quantas bolas azuis e quantas bolas brancas há na urna?
c) Se $A = 3$, para quais valores de B o valor de P_M é estritamente maior do que $\frac{1}{2}$?

26 **Efomm 2019** Um atirador, em um único tiro, tem probabilidade de 80% de acertar um específico tipo de alvo. Num exercício ele dá seis tiros seguidos nesse mesmo tipo de alvo.

Considerando-se que os tiros são independentes, em cálculo aproximado, qual é a probabilidade de o atirador errar o alvo exatamente duas vezes?

A 4,12%
B 18,67%
C 24,58%
D 27,29%
E 40,25%

27 **Unicamp 2019** A figura abaixo representa um dado na forma de um tetraedro regular com os vértices numerados de 1 a 4. Em um lançamento desse dado, deve ser observado o número estampado no vértice superior.

a) Considere a soma dos números obtidos em dois lançamentos de um dado tetraédrico. Determine de quantas maneiras essa soma pode resultar em um número primo.
b) Seja p_n a probabilidade de se observar o número *n* no lançamento de um dado tetraédrico tendencioso para o qual $p_1 = 2p_2 = 3p_3 = 4p_4$. Calcule essas quatro probabilidades.

28 **Cescea** Jogando-se 3 dados (ou um dado 3 vezes), qual a probabilidade de obtermos soma menor ou igual a 4?

A $\frac{1}{36}$
B $\frac{1}{2}$
C $\frac{5}{27}$
D $\frac{1}{18}$
E $\frac{1}{54}$

29 **Cescea** Tirando-se ao acaso 5 cartas de um baralho de 52 cartas, a probabilidade de sair exatamente 3 valetes é:

A $\frac{4}{52}$
B $\frac{4 \cdot C_{48,2}}{C_{52,5}}$
C $\frac{4 \cdot C_{52,2}}{C_{52,5}}$
D $\frac{3}{52}$
E n.d.a.

30 **Cescea** Qual a probabilidade de, jogando-se um dado, obter-se um número par de pontos?

A $\frac{1}{6}$
B $\frac{1}{2}$
C $\frac{1}{4}$
D $\frac{1}{3}$
E n.d.a.

31 **Cescem** Considere as 120 permutações dos números 3, 5, 6, 7 e 8. Uma delas é escolhida ao acaso e consideremos o número de cinco algarismos assim escolhido. Determine:
a) a probabilidade de esse número ser par.
b) a probabilidade de esse número ser maior que 70 000.
c) a probabilidade de esse número ser divisível por 3.

32 **Cescem** Numa cidade com 1000 eleitores, haverá uma eleição com dois candidatos, A e B. É feita uma prévia em que os 1000 eleitores são consultados, sendo que 510 já se decidiram, definitivamente, por A. Então, a probabilidade de que A ganhe a eleição é:

A 0,5
B 1
C 0,51
D $\frac{490}{510}$
E não pode ser calculado porque não é dado quantos eleitores entre os restantes 490 estão ainda indecisos.

33 **Cescem** Dois prêmios iguais são sorteados entre 5 pessoas, sendo duas brasileiras e três argentinas. Determine:
a) a probabilidade de serem premiados dois brasileiros.
b) a probabilidade de ser premiado pelo menos um argentino.
c) a probabilidade de serem premiados dois argentinos.

34 **Cescem** Um dado especial de forma de icosaedro tem suas 20 faces numeradas da seguinte forma: duas das faces têm o número zero; as 18 restantes têm os números –9, –8,–7,...,–1, 1, 2,..., 9. A probabilidade de que, lançando dois destes dados, tenhamos uma soma do número de pontos igual a 2 vale:

A $\frac{9}{400}$
B $\frac{18}{400}$
C $\frac{10}{400}$
D $\frac{19}{400}$
E $\frac{2}{20}$

35 **Cesgranrio** Um prédio de três andares, com dois apartamentos por andar, tem apenas três apartamentos ocupados. Determine a probabilidade de que cada um dos três andares tenha exatamente um apartamento ocupado.

36 **Cesgranrio** Três moedas, não viciadas, são lançadas simultaneamente. Determine a probabilidade de se obter duas caras e uma coroa.

37 **FEI** No lançamento de dois dados honestos, calcular a probabilidade de:
a) a soma dos pontos ser ímpar.
b) o produto dos pontos ser ímpar.

38 **EEM** Lançando-se simultaneamente dois dados, cujas faces são numeradas de 1 a 6, qual a probabilidade de:
a) serem obtidos números cujo produto seja ímpar?
b) serem obtidos números cujo produto seja par?

39 **EEM** Considere dois pequenos tetraedros com suas faces numeradas de 1 a 4. Lançando-se aleatoriamente os dois tetraedros sobre uma mesa, qual a probabilidade de que as faces em contato com a mesa:

a) tenham números iguais?

b) tenham soma 4?

40 **Fuvest** Sorteiam-se dois números naturais ao acaso entre 101 e 1000, inclusive, com reposição. Calcule a probabilidade de que o algarismo das unidades do produto dos números sorteados não seja zero.

41 **Fuvest** Uma urna contém bolas numeradas de 1 a 9. Sorteiam-se, com reposição, duas bolas. A probabilidade de que o número da segunda bola seja estritamente maior do que o da primeira é:

A $\frac{72}{81}$ C $\frac{36}{81}$ E $\frac{45}{81}$

B $\frac{1}{9}$ D $\frac{30}{81}$

42 **Fuvest** Considerando um polígono regular de n lados, n ≥ 4, e tomando-se ao acaso uma das diagonais do polígono, a probabilidade de que ela passe pelo centro é:

A 0 se n é par.

B $\frac{1}{2}$ se n é ímpar.

C 1 se n é par.

D $\frac{1}{n}$ se n é ímpar.

E $\frac{1}{n\ \ 3}$ se n é par.

43 **Fuvest** Escolhido ao acaso um elemento do conjunto dos divisores positivos de 60, a probabilidade de que ele seja primo é:

A $\frac{1}{2}$

B $\frac{1}{3}$

C $\frac{1}{4}$

D $\frac{1}{5}$

E $\frac{1}{6}$

44 **Fuvest** Escolhem-se ao acaso dois números naturais distintos, de 1 a 20. Qual a probabilidade de que o produto dos números escolhidos seja ímpar?

A $\frac{9}{38}$

B $\frac{1}{2}$

C $\frac{9}{20}$

D $\frac{1}{4}$

E $\frac{8}{25}$

45 **Fuvest** Um fichário tem 25 fichas, etiquetadas de 11 a 35.

a) Retirando-se uma ficha ao acaso, qual probabilidade é maior: de ter etiqueta par ou ímpar? Por quê?

b) Retirando-se ao acaso duas fichas diferentes, calcule a probabilidade de que suas etiquetas tenham números consecutivos.

O enunciado a seguir refere-se às questões de **46** a **48**.

A tabela abaixo dá a distribuição de probabilidades dos 4 tipos de sangue de indivíduos em uma comunidade.

Tipos sanguíneos/ probabilidade	A	B	AB	O
De ter o tipo especificado	0,20			
De não ter o tipo especificado		0,90	0,95	

46 **Cescem** A probabilidade de que um indivíduo, sorteado ao acaso, desta comunidade tenha o tipo sanguíneo O vale:

A 0,267

B 0,65

C 0,80

D 0,95

E nenhuma das anteriores.

47 **Cescem** A probabilidade de que dois indivíduos, sorteados ao acaso, desta comunidade tenham um o tipo A e o outro o tipo B vale:

A 0,60 C 0,04 E 0,30

B 0,18 D 0,02

48 **Cescem** A probabilidade de que um indivíduo, sorteado ao acaso, desta comunidade não tenha o tipo B ou não tenha o tipo AB vale:

A 0,855

B 1,85

C 0,850

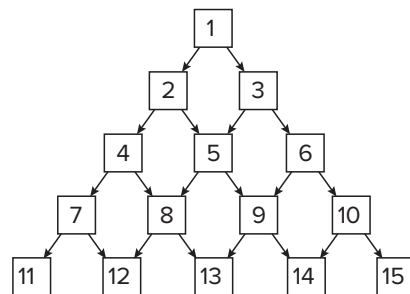
D 1,0

E nenhuma das anteriores.

49 **FCMSCSP** Dispõe-se de um mapa. Dispõe-se também de um dado com 3 faces vermelhas e 3 faces azuis. Considerando as regras:

I. partindo do quadro 1, pode-se caminhar no sentido indicado pelas setas para os demais quadros, a cada lançamento do dado.

II. lançando-se o dado, se sair face azul, segue-se pela seta da direita até o quadro seguinte.

III. lançando-se o dado, se sair face vermelha, segue se pela seta da esquerda até o quadro seguinte.

A probabilidade de chegar ao quadro 13, partindo-se de 1, é:

A $\frac{1}{16}$ B $\frac{4}{16}$ C $\frac{6}{16}$ D $\frac{8}{16}$ E $\frac{12}{16}$

50 **Fuvest** Escolhendo-se ao acaso duas arestas de um cubo, a probabilidade de elas serem reversas é:

A $\frac{1}{3}$

B $\frac{1}{4}$

C $\frac{2}{11}$

D $\frac{4}{11}$

E $\frac{5}{11}$

51 **Cescem** Uma urna contém 1 bola preta e 9 brancas. Uma segunda urna contém *x* bolas pretas e as restantes brancas, num total de 10 bolas. Um primeiro experimento consiste em retirar, ao acaso, uma bola de cada urna. Num segundo experimento, as bolas das duas urnas são reunidas e, destas, duas bolas são retiradas ao acaso. O valor mínimo de *x* a fim de que a probabilidade de saírem duas bolas pretas seja maior no segundo do que no primeiro experimento é:

A 1
B 2
C 3
D 4
E 9

52 **Cescem** Jogando-se 3 dados (ou um dado 3 vezes), qual a probabilidade de obtermos soma menor ou igual a 4?

A $\frac{1}{36}$

B $\frac{1}{2}$

C $\frac{5}{27}$

D $\frac{1}{18}$

E $\frac{1}{54}$

53 **Fuvest** Qual a probabilidade do determinante de uma matriz quadrada 2×2 com coeficientes inteiros ser ímpar?

A $\frac{1}{2}$

B $\frac{3}{8}$

C $\frac{5}{8}$

D $\frac{1}{4}$

E $\frac{3}{4}$

54 **Cescem** Em cada extração de uma certa loteria, concorrem 40 000 bilhetes. Um indivíduo foi agraciado com 10 000 bilhetes, com os quais ele vai concorrer, podendo, se quiser, dividir os 10 000 bilhetes em duas partes, da maneira que bem entender, para concorrer em duas extrações. Como deve ser feita a divisão para que a probabilidade de ele ganhar pelo menos uma vez seja máxima?

A Todos os bilhetes numa extração só.
B 5 000 em uma e 5 000 em outra.
C 2 500 em uma e 7 500 em outra.
D 1 250 em uma e 8 750 em outra.
E Nenhuma das anteriores.

55 **Cescem** Em um espaço amostral {A, B}, as probabilidades P(A) e P(B) valem, respectivamente, $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$. Assinale qual das alternativas seguintes não é verdadeira.

A $A \cup B = S$
B $\overline{A} \cup B = B$
C $\overline{A} \cup \overline{B} = \varnothing$
D $A \cap B = \overline{A} \cap \overline{B}$
E $(A \cap B) \cup (A \cup B) = S$

56 **Cescem** Sabendo-se que os erros de impressão tipográfica, por página impressa, distribuem-se de acordo com as seguintes probabilidades:

Nº de erros por página	Probabilidades
0	0,70
1	0,15
2	0,10
3	0,02
4	0,02
5 ou mais	0,01

Nestas condições:

I. A probabilidade de que numa página impressa existam estritamente mais do que três erros tipográficos vale:

A 0,05
B 0,03
C 0,02
D 0,0003
E 0,0002

II. A probabilidade de que em duas páginas impressas existam no total exatamente quatro erros tipográficos vale:

A 0,0200
B 0,0270
C 0,0440
D 0,4900
E 0,7000

57 **Cesgranrio** Num jogo com um dado, o jogador X ganha se tirar, no seu lance, um número de pontos maior ou igual ao do lance do jogador Y. A probabilidade de X ganhar é:

A $\frac{1}{2}$

B $\frac{3}{2}$

C $\frac{7}{12}$

D $\frac{13}{24}$

E $\frac{19}{36}$

58 Uma rifa compõe-se de 100 cupons, numerados de 1 a 100. Qual é a probabilidade de o número sorteado não ser um quadrado perfeito?

59 **Cesgranrio** A probabilidade de um inteiro n, $1 \le n \le 900$, ser múltiplo de 9 é:

A $\frac{1}{999}$

B $\frac{1}{10}$

C $\frac{2}{9}$

D $\frac{1}{3}$

E $\frac{1}{9}$

60 **Fuvest** Escolhido ao acaso um elemento do conjunto dos divisores positivos de 60, a probabilidade de que seja primo é:

A $\frac{1}{2}$
C $\frac{1}{4}$
E $\frac{1}{6}$
B $\frac{1}{3}$
D $\frac{1}{5}$

61 **FGV** Uma urna contém 50 bolinhas numeradas de 1 a 50. Sorteando-se uma bolinha, a probabilidade de que o número observado seja múltiplo de 8 é:

A $\frac{3}{25}$
C $\frac{1}{10}$
E $\frac{1}{5}$
B $\frac{7}{50}$
D $\frac{8}{50}$

62 **Cesgranrio** Dois dados são lançados sobre uma mesa. A probabilidade de ambos os dados mostrarem, na face superior, números ímpares é:

A $\frac{1}{3}$
C $\frac{1}{4}$
E $\frac{3}{5}$
B $\frac{1}{2}$
D $\frac{2}{5}$

63 **Fuvest** Ao lançar um dado muitas vezes, uma pessoa percebeu que a face 6 saía com o dobro de frequência da face 1, e que as outras faces saíam com a frequência esperada em um dado não viciado. Qual a frequência da face 1?

A $\frac{1}{3}$
C $\frac{1}{9}$
E $\frac{1}{12}$
B $\frac{2}{3}$
D $\frac{1}{10}$

64 **Vunesp** Um baralho consiste em 100 cartões numerados de 1 a 100. Retiram-se 2 cartões ao acaso (sem reposição). A probabilidade de que a soma dos dois números dos cartões retirados seja igual a 100 é:

A $\frac{49}{4\,950}$
C 1%
E $\frac{51}{4\,851}$
B $\frac{50}{4\,950}$
D $\frac{49}{5\,000}$

65 **Vunesp** Numa gaiola, estão 9 camundongos rotulados 1, 2, 3, ...,9. Selecionando-se conjuntamente 2 camundongos ao acaso (todos têm igual possibilidade de ser escolhidos), a probabilidade de que, na seleção, ambos os camundongos tenham rótulo ímpar é:

A 0,3777...
C 0,17
E 0,1333...
B 0,47
D 0,2777...

66 **Cesgranrio** Lançando-se um dado duas vezes, a probabilidade de ser obtido o par de valores 2 e 3, em qualquer ordem, é de:

A $\frac{1}{6}$
C $\frac{1}{12}$
E $\frac{1}{18}$
B $\frac{1}{9}$
D $\frac{1}{15}$

67 **Fuvest** Escolhe-se ao acaso três vértices distintos de um cubo. A probabilidade de que estes vértices pertençam a uma mesma face é:

A $\frac{3}{14}$
C $\frac{5}{14}$
E $\frac{13}{18}$
B $\frac{2}{7}$
D $\frac{3}{7}$

68 **Vunesp** Após uma partida de futebol, em que as equipes jogaram com as camisas numeradas de 1 a 11 e não houve substituições, procede-se ao sorteio de 2 jogadores de cada equipe para exame *antidoping*. Os jogadores da 1ª equipe são representados por 11 bolas numeradas de 1 a 11 de uma urna A; e os da 2ª, da mesma maneira, por bolas de uma urna B. Sorteia-se primeiro, ao acaso e simultaneamente, uma bola de cada urna. Depois, para o segundo sorteio, o processo deve ser repetido, com as 10 bolas restantes de cada urna. Se na primeira extração foram sorteados dois jogadores de números iguais, a probabilidade de que aconteça o mesmo na segunda extração é de:

A 0,09
B 0,1
C 0,12
D 0,2
E 0,25

Awstok/Shutterstock.com

FRENTE 2

CAPÍTULO

9

Polinômios

São muitos os modelos matemáticos que podem ser utilizados para descrever comportamentos de fenômenos naturais ou provocados. Alguns desses modelos têm como base os polinômios, assunto que será tratado neste capítulo. Polinômios são eficientes para modelar problemas que envolvem a evolução temporal de indicadores financeiros, como taxas de juros, e também para descrever problemas de geometria que envolvem medidas de comprimentos, áreas e volumes.

Existem diferentes técnicas de modelagem, como a da regressão linear e polinomial, que combinam conhecimentos estatísticos, extraídos de observações e conhecimentos matemáticos do estudo das funções, que podem ser adequados a praticamente todo tipo de variação temporal de uma grandeza.

Esses modelos permitem que sejam feitas previsões futuras sobre o comportamento de variáveis físicas e químicas, bem como demográficas e econômicas. Sendo assim, o estudo dos polinômios tem grande importância no desenvolvimento de diferentes áreas do conhecimento.

Monômios de uma variável

Denomina-se **monômio** toda expressão matemática aberta da forma $\mathbf{ax^n}$ em que:

- **a** é uma constante complexa, não nula, denominada coeficiente;
- **x** é também um número complexo denominado variável do monômio;
- **n** é um número natural denominado grau do monômio.

Então:

$$ax^n \Rightarrow \begin{cases} a \in \mathbb{C}^* \\ x \in \mathbb{C} \\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Embora a variável de um monômio possa ser representada por qualquer letra, são mais comumente utilizadas as últimas letras do alfabeto, como *x*, *y* ou *z*, ou ainda, *t* quando nos referimos ao tempo.

Veja na tabela, alguns exemplos de monômios na variável *x*.

Monômio	Coeficiente	Grau
$5x^4$	5	4
$-8ix^2$	$-8i$	2
$\frac{x}{6}$	$\frac{1}{6}$	1
x^7	1	7
$-x$	-1	1
3	3	0

Atenção

Na última linha do quadro, há um exemplo de monômio de grau zero. Ele pode ser escrito como $3x^0 = 3$.

Valor numérico de um monômio

Todo monômio pode ser interpretado como uma função do tipo $y = ax^n$. Assim, o valor numérico de um monômio é obtido como sendo a imagem da função y(x) quando a variável *x* é substituída por valores especificamente atribuídos.

Veja os exemplos a seguir:

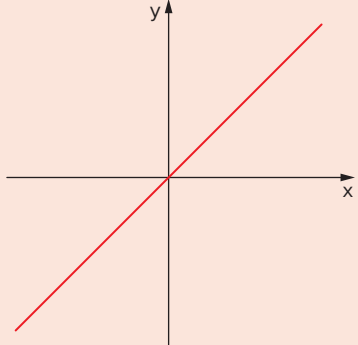
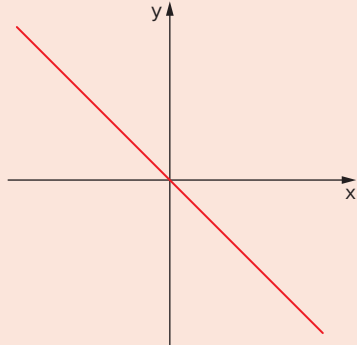
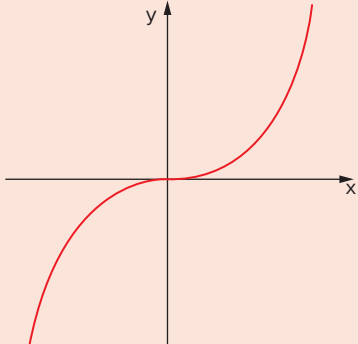
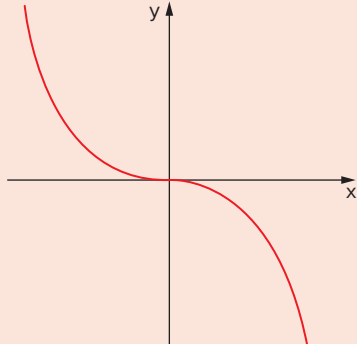
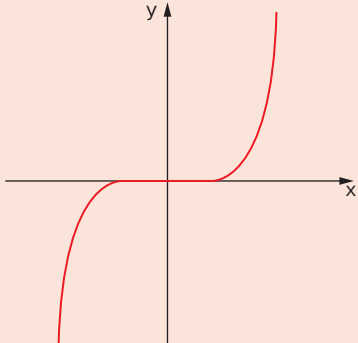
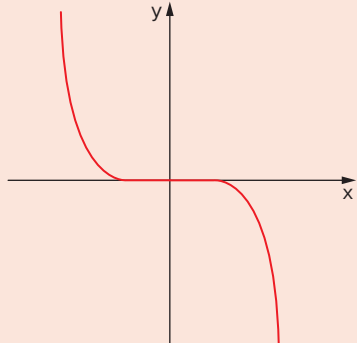
- o valor numérico do monômio $5x^4$ para $x = -2$ é: $5 \cdot (-2)^4 = 5 \cdot 16 = 80$;
- o valor numérico de $-8ix^2$ para $x = 1 + i$ é: $-8i \cdot (1 + i)^2 = -8i \cdot (1 + 2i + i^2) = -8i \cdot 2i = -16i^2 = 16$;
- o valor numérico de $\frac{x}{6}$ quando $x = 12 + 18i$ é: $\frac{12+18i}{6} = \frac{12}{6} + \frac{18}{6}i = 2 + 3i$;
- O valor numérico de x^7 quando $x = i$ é: $i^7 = i^3 = -i$;
- O valor numérico de $-x$ quando $x = -\sqrt{2}$ é: $-\left(-\sqrt{2}\right) = \sqrt{2}$;
- O valor numérico de 3 quando $x = 2020$ é: $3 \cdot 2020^0 = 3 \cdot 1 = 3$.

Atenção

Observe que o valor numérico de qualquer monômio de grau zero é sempre igual o valor de seu coeficiente.

Funções monomiais definidas em $\mathbb{R}$

Quando o universo numérico em que são recolhidos o valor do coeficiente e os valores da variável de um monômio fica restrito ao conjunto dos números reais, as funções monomiais admitem representações cartesianas que obedecem a determinados padrões.

Os formatos dos gráficos das funções monomiais definidas em $\mathbb{R}$ dependem, principalmente, do sinal de seu coeficiente e da paridade de seu grau.

Como o coeficiente de um monômio não pode ser nulo, devemos analisar quatro casos. Observe:

Veja na tabela a seguir o comportamento gráfico dos monômios de grau par:

$y = ax^n$	**Coeficiente ($a \neq 0$)**	
Grau	**$a > 0$**	**$a < 0$**
$n = 0$		
$n = 2$		
$n = 4$		

Veja na próxima tabela, o comportamento gráfico dos monômios de grau ímpar:

Operações com monômios de mesma variável

Podemos efetuar as quatro operações com monômios (adição, subtração, multiplicação e divisão) de mesma variável e, nem sempre, o resultado obtido é um monômio.

Podemos garantir que o produto de dois monômios é sempre um monômio, mas em uma adição ou subtração, isso nem sempre acontece. A soma (ou a diferença) de dois monômios será um monômio se, e somente se, os monômios adicionados (ou subtraídos) tiverem o mesmo grau. Já na divisão, o quociente é um monômio se o grau do dividendo for maior que o grau do divisor.

Multiplicação e divisão de monômios

Multiplicação

Para multiplicar monômios de mesma variável, efetua-se o produto dos coeficientes e o produto das variáveis. Observe o exemplo a seguir para os monômios $y = 2x^4$ e $z = 5x^3$. O produto $y \cdot z$ será:

$$2x^4 \cdot 5x^3 = 2 \cdot 5 \cdot x^4 \cdot x^3 = 10 \cdot x^{4+3} = 10x^7$$

Note que:

- o coeficiente do produto é o produto dos coeficientes dos fatores.
- o grau do produto é a soma dos graus dos fatores.

De modo genérico, sendo $y = ax^n$ e $z = bx^m$ dois monômios, tem-se que o produto $y \cdot z$ é dado por:

$$ax^n \cdot bx^m = abx^{n+m}$$

Divisão

Analogamente à multiplicação, para dividir um monômio por outro de mesma variável, efetua-se a divisão dos coeficientes e a divisão das variáveis. Observe o exemplo para os monômios $y = 2x^4$ e $z = 5x^3$. Os quocientes $\frac{y}{z}$ e $\frac{z}{y}$ são:

$$\begin{cases} \frac{y}{z} = \frac{2x^4}{5x^3} = \frac{2}{5}x^{4-3} = 0{,}4x \\ \frac{z}{y} = \frac{5x^3}{2x^4} = \frac{5}{2}x^{3-4} = \frac{5}{2}x^{-1} = \frac{5}{2x} \end{cases}$$

(veja o boxe Atenção a seguir)

Note que:

- o coeficiente do quociente é o quociente entre os coeficientes dos monômios.
- o grau do quociente é a diferença entre os graus dos monômios.

! Atenção

O quociente da divisão $\frac{z}{y}$ do último exemplo não é um monômio pois o expoente da variável é negativo. As teorias estudadas neste capítulo não se aplicam a esse tipo de função.

De modo genérico, sendo $y = ax^n$ e $z = bx^m$ dois monômios, tem-se que o quociente $\frac{y}{z}$ é dado por:

$$ax^n : bx^m = \frac{ax^n}{bx^m} = \frac{a}{b}x^{n-m}$$

Quando $n \geq m$ essa expressão representa um monômio.

Potências de monômios

Para elevar um monômio a um expoente natural, procede-se da seguinte maneira:

- o coeficiente da potência é a potência do coeficiente.
- o grau da potência é o produto do grau pelo expoente da potenciação.

Observe o exemplo, considerando o monômio $y = 2x^4$ e o expoente 3, ou seja, vamos calcular y^3:

$$y^3 = (2x^4)^3 = 2^3 \cdot x^{4 \cdot 3} = 8x^{12}$$

De modo genérico, sendo *m* um expoente natural e o monômio $y = ax^n$, temos que a potenciação y^m é dada por:

$$(ax^n)^m = a^m \cdot x^{n \cdot m}$$

Adição e subtração de monômios

A adição e a subtração de monômios de mesma variável só podem ser efetuadas se os monômios possuírem o mesmo grau. Para adicionar ou subtrair dois monômios nessas condições, efetua-se a soma ou a subtração dos coeficientes e, se o resultado não for nulo, mantém-se o mesmo grau dos monômios operados. Veja o exemplo a seguir, considerando os monômios $y = 6x^3$ e $z = 7x^3$. Vamos obter: $y + z$ e $y - z$:

$$y + z = 6x^3 + 7x^3 = (6 + 7)x^3 = 13x^3$$
$$y - z = 6x^3 - 7x^3 = (6 - 7)x^3 = -x^3$$

Observe que:

- o coeficiente da soma é a soma dos coeficientes dos monômios adicionados.
- o coeficiente da diferença é a diferença dos coeficientes dos monômios subtraídos.

Se o coeficiente obtido for diferente de zero, então:

- o grau da soma é o mesmo grau dos monômios somados.
- o grau da diferença é o mesmo grau dos monômios subtraídos.

De modo genérico, se $y = ax^n$ e $z = bx^n$ são dois monômios, tem-se que a soma $y + z$ e a diferença $y - z$ são expressas por:

$$ax^n \pm bx^n = (a \pm b)x^n$$

Quando dois monômios de mesma variável e graus diferentes são adicionados ou subtraídos, o resultado nunca é um monômio, mas sim um binômio.

Saiba mais

O número zero também pode ser interpretado como um monômio de coeficiente nulo, uma vez que $0x^n = 0$.

Monômios nulos não têm grau definido, pois quando o coeficiente é igual a zero, não é possível distinguir o grau dessas funções:

$$0 = 0 \cdot x = 0 \cdot x^2 = 0 \cdot x^3 = 0 \cdot x^4 = 0 \cdot x^5 = 0 \cdot x^6 = 0 \cdot x^7 = \ldots$$

Binômios

Binômios são expressões algébricas compostas de dois monômios, que resultam da adição ou da subtração desses monômios, com variáveis diferentes ou com mesma variável, mas graus diferentes.

O grau de um binômio é dado pelo grau do maior monômio.

Exemplos:

- $M = 5x^2 + 2y^3$ é um binômio de 3º grau.
- $N = 4x^2 + y^2$ é um binômio de 2º grau.
- $B = x^4 + 9x^2$ é um binômio de 4º grau.

Os monômios de um binômio também podem ser chamados de termos.

Entre esses exemplos, os binômios M e N têm duas variáveis cada: *x* e *y*. Por esse motivo é comum que sejam indicados por M(x, y) e N(x, y). Já o binômio B tem apenas a variável *x*, por isso também pode ser indicado por B(x).

- $M(x, y) = 5x^2 + 2y^3$
- $N(x, y) = 4x^2 + y^2$
- $B(x) = x^4 + 9x^2$

Binômios de grau mínimo são, necessariamente, de 1º grau, pois zero é o único número natural menor do que 1.

Exemplos:

- $P(x) = 2x + 3$
- $Q(x) = -x + 0{,}4$
- $R(x) = (5 + 2i)x + (3 - i)$

De forma genérica, um binômio de 1º grau é uma expressão matemática da forma ax + b com *a* e *b* diferentes de zero.

Operações com binômios do 1º grau

Adições e subtrações de binômios do 1º grau são efetuadas sempre entre os monômios de mesmo grau. Assim, sendo A = ax + b e B = cx + d, tem-se que:

$$A + B = (a + c)x + (b + d)$$
$$A \quad B = (a \quad c)x + (b \quad d)$$

Multiplicações entre binômios do 1º grau são efetuadas de modo distributivo entre todos os seus monômios. Assim:

$$A \cdot B = (ax + b) \cdot (cx + d)$$
$$A \cdot B = ax \cdot cx + ax \cdot d + b \cdot cx + b \cdot d$$
$$A \cdot B = acx^2 + adx + bcx + bd$$
$$A \cdot B = acx^2 + (ad + bc)x + bd$$

O produto de dois binômios do 1º grau com mesma variável resulta sempre num trinômio do 2º grau.

Trinômios com uma variável

São as expressões algébricas que resultam da adição de três monômios com mesma variável, mas graus diferentes, de modo que todo trinômio possua três monômios.

O grau de um trinômio desse tipo é dado pelo grau do maior monômio.

Exemplos:

- $R = 5x^2 + 2y^3 + 4$ é um trinômio do 3º grau.
- $S = 4x^2 + xy + y^2$ é um trinômio do 2º grau.
- $T = x^3 + 9x^2 + 5x$ é um trinômio do 3º grau.

Entre esses exemplos, os trinômios R e S têm duas variáveis cada: *x* e *y*. Por isso podem ser indicados por R(x, y) e S(x, y). Já o trinômio T tem apenas a variável *x*, por isso também pode ser indicado por T(x).

- $R(x, y) = 5x^2 + 2y^3 + 4$
- $S(x, y) = 4x^2 + xy + y^2$
- $T(x) = x^3 + 9x^2 + 5x$

Trinômios de grau mínimo são, necessariamente, do 2º grau, pois zero e um são os únicos números naturais menores do que 2.

Trinômios de 2º grau

Trata-se das expressões do tipo $ax^2 + bx + c$ em que *a*, *b* e *c* são números complexos diferentes de zero. Observe os exemplos:

- $3x^2 + 5x + 2$
- $-x^2 - \sqrt{2} \cdot x + 4$
- $x^2 - x + 1$
- $x^2 + (1 + 3i)x - 2 + 2i$

Considerando o universo dos números complexos, todo trinômio do 2º grau resulta do produto de dois binômios do 1º grau. Note os exemplos:

- $3x^2 + 5x + 2 = (x + 1)(3x + 2)$
- $-x^2 - \sqrt{2} \cdot x + 4 = \left(-x + \sqrt{2}\right)\left(x + 2\sqrt{2}\right)$
- $x^2 + x = 1 \left(x \quad \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right)\left(x \quad \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}\right)$
- $x^2 + (1 + 3i)x - 2 + 2i = (x + 1 + i)(x + 2i)$

De modo genérico, a todo trinômio do 2º grau, com apenas uma variável (no caso *x*), estão associados dois números x_1 e x_2 tais que:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Os valores de x_1 e x_2 podem ser obtidos por meio da fórmula quadrática: $\begin{cases} x_1 = \dfrac{b \quad \sqrt{b^2 \quad 4ac}}{2a} \\ x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 \quad 4ac}}{2a} \end{cases}$.

Devido à presença da operação de radiciação nessa fórmula, os valores x_1 e x_2 também são chamados de raízes do trinômio.

Quando os coeficientes *a*, *b* e *c* são números reais, a expressão $b^2 - 4ac$ é denominada discriminante do trinômio e indicada por (Δ). Lê-se delta: $\Delta = b^2 - 4ac$.

! Atenção

Sendo Δ um número real, ficam estabelecidas relações entre seu sinal e os valores das raízes do trinômio. Se o discriminante for positivo então x_1 e x_2 são números reais e diferentes; se for nulo, então x_1 e x_2 têm o mesmo valor real, e, se for negativo, então x_1 e x_2 são números complexos, não reais e conjugados um do outro.

$$\begin{cases} \Delta > 0 \iff x_1 \in \mathbb{R},\ x_2 \in \mathbb{R} \text{ e } x_1 \neq x_2 \\ \Delta = 0 \iff x_1 \in \mathbb{R},\ x_2 \in \mathbb{R} \text{ e } x_1 = x_2 \\ \Delta < 0 \iff x_1 \notin \mathbb{R},\ x_2 \notin \mathbb{R} \text{ e } x_1 = \overline{x_2} \end{cases}$$

Trinômios quadrados perfeitos

Quando um binômio do 1º grau é multiplicado por si mesmo, ou seja, é elevado à 2ª potência, obtém-se um trinômio cujo discriminante é nulo (Δ = 0).

Considere o binômio mx + n:

$$(mx + n)(mx + n) = (mx + n)^2 = m^2x^2 + 2mnx + n^2$$

Comparando essa expressão com a forma $ax^2 + bx + c$ de um trinômio do 2º grau, tem-se:

$$\begin{array}{ccccc} m^2x^2 & + & \underline{2mn}x & + & n^2 \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ ax^2 & + & bx & + & c \end{array}$$

$$\begin{cases} a = m^2 \\ b = 2mn \\ c = n^2 \end{cases}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (2mn)^2 - 4m^2n^2 = 4m^2n^2 - 4m^2n^2 = 0$$

Como neste caso as raízes x_1 e x_2 têm o mesmo valor, esse valor é denominado raiz dupla do trinômio. Todo trinômio quadrado perfeito possui raiz dupla.

Polinômios

Polinômios são funções complexas $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ resultantes da soma de uma série de monômios que podem ter mesmo grau ou graus diferentes, mesma variável ou variáveis diferentes.

As variáveis de um polinômio são comumente apresentadas entre parênteses como mostram os exemplos a seguir:

- $A(x, y) = x^2 + xy + y^2 -2x -4y + 3$
- $B(x, y, z) = 4x^3 + 9x - y + z^2$
- $P(x) = x^3 + x^2 + 8x + 20$

Entre os exemplos acima, o polinômio A tem 2 variáveis (*x* e *y*), o polinômio B tem 3 variáveis (*x*, *y* e *z*) e o polinômio P tem apenas a variável *x*.

Podemos afirmar que toda somatória de monômios de diferentes graus e mesma variável é um polinômio que pode ser expresso por:

$$P(x) = \sum_{p=0}^{n} a_p x^{n-p}, \; n \in \mathbb{N}$$

Os monômios $a_p x^{n-p}$ são denominados **termos do polinômio**, assim a palavra binômio designa um polinômio com dois termos, a palavra trinômio um polinômio com três termos e assim por diante.

Observação: Embora o prefixo **poli** indique pluralidade, no estudo da Álgebra também consideram-se os monômios como sendo um tipo especial de polinômio.

Todo número complexo também pode ser considerado um polinômio pela sua definição algébrica.

$$n = 0 \Rightarrow P(x) = \sum_{p=0}^{n} a_p x^{n-p} = \sum_{p=0}^{0} a_p x^{n-p} = a_0 x^0 = a_0$$

Polinômios como esses são denominados polinômios constantes e, particularmente, quando essa constante é o número zero, o polinômio também é chamado de **polinômio nulo**.

Características dos polinômios de apenas uma variável

Escrevendo de forma explícita a somatória dos monômios de graus diferentes, que definem um polinômio com uma única variável, tem-se a expressão geral:

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n$$

Os coeficientes e a variável de um polinômio podem ser quaisquer números complexos, mas o expoente da variável deve ser necessariamente um número natural.

Cada termo ou monômio de um polinômio apresenta um coeficiente multiplicado pela variável elevada a algum expoente. No termo a_1x^{n-1}, por exemplo, a_1 é o coeficiente, *x* é a variável e n – 1 é o expoente.

Os termos de um polinômio costumam ser apresentados de acordo com alguma relação de ordem (crescente ou decrescente) entre os expoentes da variável. Neste capítulo, foi feita a opção pela ordem decrescente dos expoentes.

No termo $a_{n-1}x$ tem-se, particularmente, que a variável *x* está elevada à primeira potência, ou seja, o expoente da variável é o número 1:

$$a_{n-1}x = a_{n-1}x^1$$

Outro termo que merece atenção especial é o termo a_n, em que o expoente da variável *x* é o número zero:

$$a_n = a_nx^0$$

Este monômio de grau zero é denominado **termo independente** do polinômio.

Grau de um polinômio

O grau de um polinômio P é indicado por G_P ou gr(P). Em polinômios de apenas uma variável, o grau coincide com o valor do expoente do seu monômio não nulo de maior grau.

O monômio não nulo que fornece o grau de um polinômio é denominado **termo principal** do polinômio. Veja, a seguir, alguns exemplos:

Polinômio	Termo principal	Grau
$P(x) = 3x^7 + 2x^6 + x^4 - 8x^3 - 2x^2 + 5$	$3x^7$	gr(P) = 7
$Q(x) = -x^3 + 6x^2 + 3x \quad 5$	$-x^3$	gr(P) = 3
$T(x) = x^2 + 5x + 18$	x^2	gr(P) = 2
$B(x) = 7x - 5$	$7x^1$	gr(P) = 1
$M(x) = 12$	$12x^0$	gr(P) = 0

Considere a expressão geral para o polinômio P(x) de acordo com a ordem decrescente dos expoentes de seus termos:

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n$$

Nessa expressão, em que *n* é um número natural, nem sempre o primeiro termo a_0x^n representa o termo principal de P, pois o termo pode ou não ser um monômio nulo. Se o primeiro termo da expressão for não nulo, então ele é o termo principal e seu expoente *n* indica qual é o grau do polinômio.

$$a_0 \neq 0 \Leftrightarrow gr(P) = n$$

Quando o primeiro termo da expressão for um monômio nulo, ou seja, $a_0 = 0$, deve-se observar o seu segundo termo a_1x^{n-1}, a fim de verificar se ele é ou não nulo. Caso o primeiro termo seja nulo e o segundo não, o grau do polinômio é o expoente da variável do segundo termo.

$$a_0 = 0 \text{ e } a_1 \neq 0 \Leftrightarrow gr(P) = n \quad 1$$

Quando o primeiro e segundo termos da expressão geral são nulos, deve-se observar o seu terceiro termo e assim por diante, até que se encontre um termo que não seja nulo.

Exercício resolvido

1 Sendo *k* um número real, determine os valores de *k* para que $P(x) = (k - 1)x^3 + 3x^2 + kx + 1$ seja um polinômio do:

a) 2º grau.

b) 3º grau.

Resolução:

a) Para que P(x) seja do 2º grau, o coeficiente de x^3 deve ser igual a zero. Assim: $k \quad 1 = 0 \Leftrightarrow k = 1$.

b) Para que P(x) seja do 3º grau, o coeficiente de x^3 deve ser diferente de zero. Assim: $k - 1 \neq 0 \Leftrightarrow k \neq 1$.

! Atenção

Polinômio nulo

Se todos os termos de um polinômio forem nulos, então o polinômio também é chamado de **polinômio nulo**.

$$N(x) = \sum_{p=0}^{n} a_p x^{n-p},\ n \in \mathbb{N} \text{ e } a_p = 0,\ \forall p$$

O polinômio nulo resulta da adição de qualquer quantidade de monômios nulos:

$$N(x) = 0x^n + 0x^{n \quad 1} + 0x^{n \quad 2} + \ldots + 0x^2 + 0x + 0$$

O polinômio nulo também resulta da subtração de um polinômio por si mesmo:

$$P(x) - P(x) = N(x)$$

O polinômio nulo não tem grau definido.

Série dos coeficientes de um polinômio

Além da expressão geral $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$, todo polinômio não nulo pode ser representado pela sucessão dos números complexos que são os coeficientes de cada termo:

$$(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n),\ a_0 \neq 0$$

Os elementos ordenados nessa sucessão de números complexos são denominados:

$a_0 \rightarrow$ Coeficiente principal ou coeficiente dominante

$a_1 \rightarrow$ Coeficiente secundário

⋮

$a_n \rightarrow$ Termo independente

A série de coeficientes de um polinômio sempre inicia com seu coeficiente principal $a_0 \neq 0$ e termina pelo seu termo independente a_n. Os polinômios de grau zero têm apenas um coeficiente, por isso só observam-se as séries de coeficientes de polinômios com grau $n \geq 1$.

Por exemplo, a série de coeficientes do binômio $B(x) = 7x - 5$ é o par ordenado (7, −5); a série de coeficientes do trinômio $T(x) = x^2 + 5x + 18$ é a trinca ordenada (1, 5, 18); a série de coeficientes do quadrinômio $Q(x) = -x^3 + 6x^2 + 3x - 5$ é a quadra ordenada (−1, 6, 3, −5).

O número de elementos da série de coeficientes de um polinômio é sempre um número maior que o grau do polinômio. Então, se $gr(P) = n$, a série possui $(n + 1)$ elementos ordenados. Assim, os coeficientes dos termos nulos de um polinômio de grau $n \geq 1$ devem ser apresentados em suas respectivas séries.

Observe, por exemplo, que embora o polinômio $P(x) = 3x^7 + 2x^6 + x^4 - 8x^3 - 2x^2 + 5$ seja do 7º grau, há apenas 6 termos explícitos em sua forma geral. Isso ocorre quando há monômios nulos entre seus termos. No caso específico desse P(x), trata-se dos termos do 5º e 1º graus. Escrevendo cada um deles com o coeficiente nulo, tem-se uma expressão de 8 termos visíveis:

$$P(x) = 3x^7 + 2x^6 + 0x^5 + x^4 - 8x^3 - 2x^2 + 0x + 5$$

Nessa representação do polinômio pode-se observar mais facilmente a série de seus coeficientes com $7 + 1 = 8$ elementos ordenados:

$$(3, 2, 0, 1, -8, -2, 0, 5)$$

As séries de coeficientes de um polinômio são usadas nos algoritmos de algumas operações com polinômios como, por exemplo, a divisão.

Valor numérico de um polinômio

Para determinar o valor numérico de um polinômio, basta que sejam atribuídos valores numéricos para suas variáveis.

Observe os exemplos a seguir:

- O valor numérico do polinômio $A(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - 4y + 3$ quando $x = 3$ e $y = 4$ é:

  $A(3, 4) = 3^2 + 3 \cdot 4 \cdot 4^2 - 2 \cdot 3 - 4 \cdot 4 + 3 = 9 + 12 + 16 - 6 - 16 + 3 = 18$

- O valor numérico do mesmo polinômio quando $x = 0$ e $y = -1$ é:

  $A(0, -1) = 0^2 + 0 \cdot (-1) + (-1)^2 - 2 \cdot 0 - 4 \cdot (-1) + 3 = 0 + 0 + 1 - 0 + 4 + 3 = 8$

- O valor numérico de $B(x, y, z) = 4x^3 + 9x - y + z^2$ quando $x = 0$ e $y = 1$ e $z = 2$ é:

  $B(0, 1, 2) = 4 \cdot 0^3 + 9 \cdot 0 - 1 + 2^2 = 0 + 0 - 1 + 4 = 3$

- O valor numérico de $P(x) = x^3 + x^2 + 8x + 20$ quando $x = -1$ é:

  $P(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 + 8 \cdot (-1) + 20 = -1 + 1 - 8 + 20 = 12$
- O valor numérico desse mesmo P(x) quando $x = -2$ é:

  $P(-2) = (-2)^3 + (-2)^2 + 8 \cdot (-2) + 20 = -8 + 4 - 16 + 20 = 0$

Entre os valores numéricos de um polinômio com uma ou mais variáveis, há dois casos que merecem atenção especial: o caso em que todas as variáveis são iguais a 0 (zero) e o caso em que todas elas são iguais a 1 (um).

Quando todas as variáveis de um polinômio são nulas, ou seja, iguais à zero, o valor numérico do polinômio coincide com o valor de seu termo independente. Por exemplo, o termo independente do polinômio $A(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - 4y + 3$ é:

$A(0, 0) = 0^2 + 0 \cdot 0 + 0^2 - 2 \cdot 0 - 4 \cdot 0 + 3 = 3$

Quando todas as variáveis de um polinômio são unitárias, ou seja, iguais à um, o valor numérico do polinômio coincide com o valor da soma de seus coefi cientes. Por exemplo, a soma dos coeficientes do polinômio $A(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - 4y + 3$ é:

$A(1, 1) = 1^2 + 1 \cdot 1 + 1^2 - 2 \cdot 1 - 4 \cdot 1 + 3 = 1 + 1 + 1 - 2 - 4 + 3 = 0$

Zeros ou raízes de um polinômio

Quando o valor numérico de um polinômio com apenas uma variável é igual a zero, o valor atribuído à variável do polinômio é chamado de **zero do polinômio** ou **raiz do polinômio**.

Veja os exemplos a seguir:

- -2 é raiz do polinômio $P(x) = x^3 + x^2 + 8x + 20$, pois $P(-2) = -8 + 4 - 16 + 20 = 0$.
- 5 é raiz do polinômio $Q(x) = x^2 - 4x - 5$, pois $Q(5) = 5^2 - 4 \cdot 5 - 5 = 25 - 20 - 5 = 0$.
- 3i é raiz do polinômio $M(x) = x^2 + 9$, pois $M(3i) = (3i)^2 + 9 = -9 + 9 = 0$.

Saiba mais

Se a soma dos coeficientes de um polinômio P(x) for igual à zero, então uma das raízes desse polinômio é $x = 1$.

Atenção

Se P(x) é um polinômio de apenas uma variável, tem-se que:

- O termo independente de P(x) é $P(0) = a_n$.
- A soma dos coeficientes de P(x) é $P(1) = a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_{n-2} + a_{n\ 1} + a_n$.
- Se $P(\alpha) = 0$ então $x = \alpha$ é uma raiz de P.

Classificação de polinômios

É possível classificar os polinômios tanto pelo grau, quanto pela quantidade de termos não nulos. Para isso, considere que *n* seja o grau do polinômio e que *m* seja o número de termos não nulos desse mesmo polinômio.

Desses valores, tem-se a relação $n \geq m \quad 1$ que aponta o grau mínimo de um polinômio de acordo com sua quantidade de termos. De acordo com tal relação, o grau mínimo de um monômio ($m = 1$) é $n = 0$, o grau mínimo de um binômio ($m = 2$) é $n = 1$, o grau mínimo de um trinômio ($m = 3$) é $n = 2$ e assim por diante. Observe, por exemplo, que o binômio $4x + 2$ é de 1º grau, o binômio $3x^2 + 1$ é de 2º grau, o binômio $2x^3 + 8$ é de 3º grau, o trinômio $x^2 - 3x + 2$ é de 2º grau, o trinômio $-x^3 + 8x^2 + 7$ é de 3º grau, o trinômio $x^4 - 6x^2 + 5$ é de 4º grau e o monômio $2x^5$ é de 5º grau.

Quando $n = m - 1$ o polinômio é denominado completo. A série de coeficientes de um polinômio completo não apresenta nenhum elemento nulo. Note que o binômio $4x + 2$ é um polinômio do 1º grau completo e seus coeficientes formam a série (4, 2) e que o trinômio $x^2 - 3x + 2$ é um polinômio do 2º grau completo e seus coeficientes formam a série (1, −3, 2).

Quando $n > m - 1$ o polinômio é denominado incompleto. A série de coeficientes de um polinômio incompleto apresenta ao menos um elemento nulo. Dos exemplos citados anteriormente, temos que o binômio $3x^2 + 1$ é um polinômio do 2º grau incompleto cuja série de coeficientes é (3, 0, 1), o binômio $2x^3 + 8$ é um poli nômio do 3º grau incompleto cuja série de coeficientes é (2, 0, 0, 8), o trinômio $-x^3 + 8x^2 + 7$ é um polinômio do 3º grau incompleto cuja série de coeficientes é (−1, 8, 0, 7), o trinômio $x^4 - 6x^2 + 5$ é um polinômio do 4º grau incompleto cuja série de coeficientes é (1, 0, −6, 0, 5) e o monômio $2x^5$ é um polinômio do 5º grau incompleto cuja série de coeficientes é (2, 0, 0, 0, 0, 0).

Polinômios unitários

Um polinômio é denominado unitário sempre que seu coeficiente principal é igual a 1, ou seja, quando $a_0 = 1$. Por exemplo, o polinômio $A(x) = x - 3$ é um polinômio unitário do 1º grau. Já o polinômio $B(x) = x^2 - 6x + 5$ é um polinômio unitário do 2º grau.

A expressão geral dos polinômios unitários de grau *n* é:

$$P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$$

Polinômios recíprocos

Considere um polinômio de coeficientes reais P(x) na sua forma geral:

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n$$

Chama-se polinômio recíproco de P(x) ao polinômio $P^*(x)$ expresso na forma geral por:

$$P^*(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

Dois polinômios são recíprocos um do outro quando a série dos coeficientes de um deles coincide com a série de coeficientes do outro na ordem contrária.

Exemplos:

- $B(x) = 2x + 3$ é recíproco de $B^*(x) = 3x + 2$.
- $T(x) = x^2 + 4x - 3$ é recíproco de $T^*(x) = -3x^2 + 4x + 1$.
- $Q(x) = 2x^3 - 5x + 4$ é recíproco de $Q^*(x) = 4x^3 - 5x^2 + 2$.

FRENTE 2

Entre as propriedades que relacionam dois polinômios recíprocos P(x) e $P^*(x)$, há duas que merecem destaque. São elas: se gr(P) = n, então $P^*(x) = x^n \cdot P\left(\frac{1}{x}\right)$; e se $\alpha \neq 0$ e $P(\alpha) = 0$, então $P^*\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 0$.

Essa segunda propriedade garante que se o termo independente de um polinômio não for nulo, então os in versos das raízes desse polinômio serão as raízes de seu polinômio recíproco.

Note, como exemplo, que as raízes do polinômio $T(x) = x^2 \quad 5x + 6$ são 2 e 3; assim, podemos concluir que $x = \frac{1}{2}$ e $x = \frac{1}{3}$ são as raízes de seu polinômio recíproco $T^*(x) = 6x^2 - 5x + 1$.

Saiba mais

Se os coeficientes de um polinômio P(x) forem números complexos, então os coeficientes de seu polinômio recíproco serão os conjugados dos coeficientes de P na ordem contrária.

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n$$

$$P^*(x) = \overline{a_n}x^n + \overline{a_{n-1}}x^{n-1} + \overline{a_{n-2}}x^{n \ \ 2} + \ldots + \overline{a_2}x^2 + \overline{a_1}x + \overline{a_0}$$

Polinômios autorrecíprocos

Um polinômio P(x) é denominado autorrecíproco ou palíndromo quando coincidir com o seu recíproco, ou seja, quando $P^*(x) = P(x)$.

Os coeficientes de um polinômio autorrecíproco de grau *n* obedecem à relação:

$$a_p = a_{n-p}, \forall p \leq n$$

A série dos coeficientes de um polinômio autorrecíproco é a mesma lida da esquerda para a direita ou da direita para a esquerda. Por exemplo, o polinômio $P(x) = 2x^5 + 3x^4 \quad 10x^3 \quad 10x^2 + 3x + 2$ é um polinômio autorecíproco.

Vale ressaltar que se $x = \alpha$ é raiz de um polinômio autorrecíproco, então $x = \frac{1}{\alpha}$ também é raiz do polinômio. Observe, por exemplo, que x = 2 é uma das raízes do polinômio P(x), ou seja, P(2) = 0:

$$P(2) = 2 \cdot 2^5 + 3 \cdot 2^4 \quad 10 \cdot 2^3 \quad 10 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 2$$

$$P(2) = 2 \cdot 32 + 3 \cdot 16 - 10 \cdot 8 - 10 \cdot 4 + 3 \cdot 2 + 2$$

$$P(2) = 64 + 48 - 80 - 40 + 6 + 2 = 0$$

Como P(x) é autorrecíproco, então $x = \frac{1}{2}$ também é raiz de P(x):

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 - 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + 2$$

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{32} + \frac{3}{16} - \frac{10}{8} - \frac{10}{4} + \frac{3}{2} + 2$$

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2 + 6 - 40 - 80 + 48 + 64}{32} = \frac{0}{32} = 0$$

Uma propriedade importante dos polinômios recíprocos de grau ímpar é que eles admitem $x = -1$ como uma de suas raízes. Considerando o polinômio P(x), podemos verificar que isso é válido:

$$P(\ \ 1) = 2 \cdot (-1)^5 + 3 \cdot (-1)^4 \quad 10 \cdot (-1)^3 \quad 10 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1) + 2$$

$$P(\ \ 1) = 2 \cdot (\ \ 1) + 3 \cdot 1 \quad 10 \cdot (\ \ 1) \quad 10 \cdot 1 + 3 \cdot (\ \ 1) + 2$$

$$P(\ \ 1) = \quad 2 + 3 + 10 \quad 10 \quad 3 + 2 = 0$$

Portanto, –1 é raíz do polinômio P(x).

Saiba mais

Um polinômio P(x) é denominado antipalíndromo quando $P^*(x) = -P(x)$.

Os coeficientes de um polinômio antipalíndromo de grau *n* obedecem à relação:

$$a_p + a_{n-p} = 0, \forall p \leq n$$

Trocando os sinais de todos os elementos da série de coeficientes de um polinômio autorrecíproco, obtém-se a mesma série na ordem contrária. Exemplos:

$$P(x) = 2x^5 + 3x^4 - 10x^3 + 10x^2 - 3x - 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -P(x) = -2x^5 - 3x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 3x + 2 = P^*(x)$$

$$Q(x) = x^4 + 5x^3 - 5x - 1 \Rightarrow -Q(x) = -x^4 - 5x^3 + 5x + 1 = Q^*(x)$$

Todo polinômio antipalíndromo admite x = 1 como uma de suas raízes.

Apresentações de um polinômio

Além da expressão geral $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$, há diversas possibilidades para a apresentação de um mesmo polinômio. Entre elas merecem destaque as **formas fatoradas**, que apresentam o polinômio como produto de binômios unitários e do 1º grau.

Forma fatorada

No universo dos números complexos, todo polinômio P(x) de grau *n* pode ser decomposto em exatamente *n* fatores unitários e do 1º grau, como mostra a seguinte expressão:

$P(x) = a_0 \cdot (x - \alpha_1) \cdot (x - \alpha_2) \cdot (x - \alpha_3) \cdot \ldots \cdot (x - \alpha_n)$, com $a_0 \neq 0$

Para obter a expressão fatorada de um polinômio com apenas uma variável, é necessário determinar o conjunto $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n\}$ de todas as raízes ou zeros do polinômio. O número de raízes complexas de um polinômio sempre coincide com o valor de seu grau.

Os polinômios do 1º grau possuem apenas uma raiz complexa, por isso têm sua forma fatorada expressa por $P(x) = a_0 \cdot (x \quad \alpha_1)$. Os polinômios do 2º grau possuem exatamente duas raízes complexas e sua forma fatorada é expressa por $P(x) = a_0 \cdot (x \quad \alpha_1) \cdot (x \quad \alpha_2)$ e assim por diante, sempre lembrando que o conjunto dos números complexos contém o conjunto dos números reais.

Forma fatorada abreviada

Se um polinômio P(x) tem grau $n \geq 2$, então existe a possibilidade de que duas ou mais de suas raízes sejam iguais. Nesses casos pode-se indicar a quantidade de fatores iguais presentes na forma fatorada de P por meio de expoentes naturais:

$P(x) = a_0 \cdot (x - \alpha_1)^{m_1} \cdot (x - \alpha_2)^{m_2} \cdot \ldots \cdot (x - \alpha_k)^{m_k}$, com $a_0 \neq 0$

Na expressão abreviada do polinômio P os expoentes de cada binômio unitário e de 1º grau, que representa um fator do polinômio, são chamados de multiplicidades das raízes de P. Assim:

- m_1 é a multiplicidade da raiz α_1;
- m_2 é a multiplicidade da raiz α_2;

  ⋮
- m_k é a multiplicidade da raiz α_k.

Nessa representação do polinômio não deve haver valores iguais entre as raízes $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ do polinômio, pois assim a expressão poderia ser mais abreviada ainda.

Os valores de m_1 a m_k não podem ser todos iguais a 1, pois, nesse caso, todas as raízes do polinômio são distintas e, assim, o polinômio não pode ser escrito na forma fatorada abreviada. Portanto, $k < n$.

Além disso, a soma de todas as multiplicidades das raízes de um polinômio deve coincidir com o grau do polinômio:

$$m_1 + m_2 + m_3 + ... + m_k = gr(P)$$

As raízes de um polinômio podem ser classificadas de acordo com os valores de suas multiplicidades. Assim, sendo *m* a multiplicidade da raiz α de um polinômio P(x), tem-se que:

- Se $m = 1$, então α é uma raiz simples.
- Se $m = 2$, então α é uma raiz dupla.
- Se $m = 3$, então α é uma raiz tripla etc.

Veja alguns exemplos:

- o polinômio P(x) do 2º grau que possui raiz dupla é da forma:

$$P(x) = a_0 \cdot (x - \alpha)^2$$

- o polinômio P(x) de 3º grau que possui uma raiz dupla e uma raiz simples é da forma:

$$P(x) = a_0 \cdot (x - \alpha_1)^2 \cdot (x - \alpha_2)$$

- o polinômio P(x) de 3º grau que possui raiz tripla é da forma:

$$P(x) = a_0 \cdot (x - \alpha)^3$$

Identidade de polinômios

Sejam $a_0 \neq 0$ e $b_0 \neq 0$ os respectivos coeficientes principais de dois polinômios A(x) e B(x) com mesmo grau $n \in \mathbb{N}$. Na forma geral, têm-se:

$$A(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n$$
$$B(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + ... + b_{n-2}x^2 + b_{n-1}x + b_n$$

Os dois polinômios A(x) e B(x) serão considerados idênticos se, e somente se, tiverem o mesmo grau e exatamente a mesma série de coeficientes:

$$A(x) \equiv B(x) \Rightarrow gr(A) = gr(B) \text{ e } \begin{cases} a_0 = b_0 \\ a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ \vdots \\ a_n = b_n \end{cases}$$

Observação: Recomenda-se que as identidades polinomiais sejam indicadas com o símbolo (≡), para não serem confundidas com equações polinomiais.

Equações × identidades

Dois polinômios idênticos assumem os mesmos valores numéricos qualquer que seja o número complexo atribuído à sua variável.

$$A(x) \equiv B(x)$$

Exemplo:

$$x^3 - 19x - 30 \equiv (x + 2)(x + 3)(x - 5)$$

Identidades também podem ser expressas usando o símbolo de igualdade (=), mas como se trata de sentenças matemáticas verdadeiras para todo *x*, recomenda-se acrescentar (∀x), que significa literalmente "para todo valor de *x*" ou "qualquer que seja *x*". Assim:

$$x^3 - 19x - 30 = (x + 2)(x + 3)(x - 5), \forall x$$

Equações polinomiais também podem ser expressas por uma igualdade de dois polinômios, mas nesse caso os polinômios assumem os mesmos valores numéricos apenas quando alguns poucos números complexos são atribuídos a sua variável.

$$A(x) = B(x)$$

Exemplo:

$$x^3 - 19x - 30 = x(x^2 + 11)$$

Essa é uma sentença matemática que pode ser verdadeira ou falsa, de acordo com o valor de *x*. Note que para x = 1, por exemplo, a sentença é verdadeira, mas para x = 2 ela é falsa:

$$x = -1 \Rightarrow \begin{cases} A(-1) = (-1)^3 - 19 \cdot (-1) - 30 = \\ = \ 1 + 19 \ \ 30 = \ \ 12 \\ B(=1) \cdot \ (+1) \ ((= \ 1)^2 + 11) = (\ \ 1) \ (1 \ \ 11) \\ = (-1) \cdot 12 = -12 \end{cases}$$

$$x = 2 \Rightarrow \begin{cases} A(2) = 2^3 - 19 \cdot 2 - 30 = 8 - 38 - 30 = -60 \\ B(2) = 2 \cdot (2^2 + 11) = 2 \cdot (4 + 11) = 2 \cdot 15 = 30 \end{cases}$$

Os números que tornam verdadeira a sentença de uma equação polinomial são denominados soluções da equação. Assim, no exemplo, tem-se que x = –1 é solução da equação, pois implica uma igualdade (–12 = –12). Já x = 2 não é solução da equação, pois não implica uma igualdade (–60 ≠ 30).

O grau de uma equação polinomial determina o número máximo de soluções complexas que ela pode possuir.

Verificando identidades

Para garantir a identidade de dois polinômios de grau **n**, por meio da atribuição de valores numéricos, é necessário que sejam feitas pelo menos **n + 1** atribuições para a variável dos polinômios. Assim, como não há equação polinomial que admita mais soluções do que o número de seu grau, a igualdade explorada deve ser de fato uma identidade polinomial.

Como exemplo desse processo, considere os polinômios A(x) e B(x) apresentados na forma geral e na forma fatorada, respectivamente:

$$A(x) = x^3 \quad 19x \quad 30$$

$$B(x) = (x + 2)(x + 3)(x \quad 5)$$

Na expressão do polinômio A(x) observa-se a série de seus coeficientes (1, 0, –19, –30) e na expressão do polinômio B(x) observa-se o conjunto de suas raízes {–2, –3, 5}.

Como gr(A) = gr(B) = 3, para mostrar que os polinômios são idênticos, por meio de verificações numéricas, é necessário atribuir às suas variáveis pelo menos 4 valores numéricos quaisquer:

$$x = 1 \Rightarrow \begin{cases} A(1) = 1^3 \quad 19 \cdot 1 \quad 30 = 1 \quad 19 \quad 30 = \quad 48 \\ B(1) = (1+2)(1+3)(1-5) = 3 \cdot 4 \cdot (-4) = -48 \end{cases}$$

$$x = 0 \Rightarrow \begin{cases} A(0) = 0^3 - 19 \cdot 0 - 30 = 0 - 0 - 30 = -30 \\ B(0) = (0+2)(0+3)(0-5) = 2 \cdot 3 \cdot (-5) = -30 \end{cases}$$

$$x = -1 \Rightarrow \begin{cases} A(-1) = (-1)^3 - 19 \cdot (-1) - 30 = -1 + 19 - 30 = -12 \\ B(\quad 1) = (\quad 1 + 2)(\quad 1 + 3)(\quad 1 \quad 5) = 1 \cdot 2 \cdot (\quad 6) = \quad 12 \end{cases}$$

$$x = -2 \Rightarrow \begin{cases} A(-2) = (-2)^3 - 19 \cdot (-2) - 30 = -8 + 38 - 30 = 0 \\ B(-2) = (-2+2)(-2+3)(-2-5) = 0 \cdot 1 \cdot (-7) = 0 \end{cases}$$

Assim, tem-se que A(1) = B(1), A(0) = B(0), A(1) = B(1) e A(–2) = B(–2).

Por se tratar de polinômios do 3º grau que coincidiram em 4 valores numéricos, pode-se afirmar que A(x) e B(x) são polinômios idênticos:

$$A(x) \equiv B(x)$$

Exercício resolvido

2 Sendo *a* e *b* os números tais que a igualdade $a(2 - x)^2 + 10 = x(1 - 2x) + bx^2$ é verdadeira para todo *x* real, então a + b é igual a:

A –6,5
B –1,5
C 3,6
D 1,5
E 6,5

Resolução:

Fazendo x = 0, obtemos o valor de a:

$$a(2 - 0)^2 + 10 = 0 \cdot (1 - 2 \cdot 0) + b \cdot 0^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4a + 10 = 0 + 0 \therefore a = -2,5$$

Fazendo x = 2, obtemos o valor de b:

$$a(2 \quad 2)^2 + 10 = 2 \cdot (1 \quad 2 \cdot 2) + b \cdot 2^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 + 10 = 2 \cdot (-3) + 4b \therefore b = 4$$

Portanto: a + b = –2,5 + 4 = 1,5.

Alternativa: **D**.

Outra maneira de verificar a identidade desses polinômios consiste em partir da expressão fatorada B(x) e aplicar a propriedade distributiva do produto até que a expressão geral A(x) seja encontrada.

$$B(x) = (x + 2)(x + 3)(x \quad 5) = [x^2 + 3x + 2x + 6](x \quad 5) =$$
$$= [x^2 + 5x + 6](x \quad 5) = x^3 \quad 5x^2 + 5x^2 \quad 25x + 6x \quad 30 =$$
$$= x^3 \quad 19x \quad 30 = A(x)$$

Observe que todas as expressões intermediárias entre a forma fatorada de B(x) e a forma geral A(x) caracterizam polinômios idênticos.

Exercício resolvido

3 Determine os parâmetros reais *a*, *b* e *c* que tornam idênticos os polinômios P(x) e Q(x) definidos a seguir.

$$P(x) = (a \quad 2)x^3 \quad bx^2 \quad (c + 1)x + 2$$
$$Q(x) = 5x^3 \quad 8x^2 + 7x \quad 2$$

Resolução:

Comparando as séries de coeficientes desses polinômios, tem-se: $\begin{cases} a - 2 = 5 \Leftrightarrow a = 7 \\ b = \quad 8 \\ c + 1 = 7 \Leftrightarrow c = 6 \end{cases}$.

Fatorando polinômios

Fatorar é um termo matemático para designar a transformação de algum ente matemático no produto de outros. No estudo da Aritmética, todos os números que não são primos podem ser fatorados. O número 10, por exemplo, é resultado da multiplicação dos números 2 e 5. Por isso, a forma fatorada do número 10 é 2 · 5.

Alguns números possuem diversas formas fatoradas, como o número 40, por exemplo, possui seis fatorações distintas, note:

$$40 = 2 \cdot 20 = 4 \cdot 10 = 5 \cdot 8 = 2 \cdot 2 \cdot 10 = 2 \cdot 4 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$$

O fato de a multiplicação ser uma operação comutativa, a ordem dos fatores não altera a forma fatorada de um número. Assim, os produtos 5 · 8 e 8 · 5 indicam a mesma fatoração do número 40.

O teorema fundamental da Aritmética enuncia que todo número natural não primo admite apenas uma forma de decomposição em fatores primos. No caso do número 40 essa forma é: 40 = 2 · 2 · 2 · 5.

Quando dois ou mais fatores primos de um número natural são iguais, a forma fatorada desse número pode ser abreviada pelo uso da potenciação: $40 = 2^3 \cdot 5^1$.

Dessa expressão deve-se entender que no número 40, o fator primo 2 possui **multiplicidade 3** e o fator primo 5 possui **multiplicidade 1**.

Quando o universo dos números considerados é estendido além dos números naturais, novas formas fatoradas podem surgir. Por exemplo:

- no conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros: 40 = (–4) · (–10);

- No conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais: $40 = 0{,}5 \cdot 80$;
- No conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais: $40 = 2\sqrt{5} \cdot 4\sqrt{5}$;
- No conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos: $40 =$ $= (6 + 2i) \cdot (6 \quad 2i)$.

No estudo da Álgebra, os polinômios de grau $n > 1$ podem ser fatorados em polinômios de graus menores do que *n*. O binômio do 2º grau $x^2 - 9$, por exemplo, é resultado da multiplicação dos binômios de 1º grau $x + 3$ e $x - 3$. Por isso, a forma fatorada de $x^2 - 9$ é $(x + 3)(x - 3)$.

Alguns polinômios possuem diversas formas fatoradas, como $P(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$, por exemplo, possui quatro fatorações distintas, sendo três com um fator de 1º grau e outro de 2º grau:

$$P(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = (x + 1)(x^2 + 5x + 6)$$
$$P(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = (x + 2)(x^2 + 4x + 3)$$
$$P(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = (x + 3)(x^2 + 3x + 2)$$

E apenas uma com todos os fatores de 1º grau:

$$P(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = (x + 1)(x + 2)(x + 3)$$

Dessa expressão deve-se entender que:

$$\begin{cases} \text{A série de coeficientes de } P(x) \text{ é } (1, 6, 11, 6). \\ \text{O conjunto das raízes de } P(x) \text{ é } \{\quad 1,\quad 2,\quad 3\}. \end{cases}$$

Polinômios podem ter quaisquer tipos de números complexos como coeficientes ou raízes. A única restrição é feita aos expoentes da variável que devem ser, necessariamente, números naturais. Assim, expressões como $x - 4 = (\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)$, por exemplo, não representam fatorações polinomiais, pois $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ e $\frac{1}{2}$ não é um expoente natural. Polinômios do 1º grau podem ser fatorados apenas no caso de não serem polinômios unitários como, por exemplo, $3x - 4 = 3\left(x - \frac{4}{3}\right)$.

Os polinômios unitários de 1º grau fazem o papel aná logo ao dos números primos na fatoração de polinômios. Dessa analogia, pode-se enunciar que todo polinômio de grau $n > 1$ admite apenas uma fatoração em polinômios unitários e do 1º grau. A identidade entre a forma geral de um polinômio e essa forma fatorada única é uma importante ferramenta da modelagem matemática.

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \equiv a_0(x \quad \alpha_1)(x \quad \alpha_2)\ldots(x \quad \alpha_n)$$

com $a_0 \neq 0$ e $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sendo as raízes do polinômio.

Dessa expressão deve-se entender que todo polinômio de grau *n* possui exatamente *n* raízes complexas e, assim, expressões particulares dessa identidade podem ser ob servadas de acordo com o grau do polinômio.

- Polinômios do 1º grau possuem apenas uma raiz complexa:

$$ax + b \equiv a(x - \alpha_1),\ a \neq 0$$

- Polinômios do 2º grau possuem exatamente duas raízes complexas

$$ax^2 + bx + c \equiv a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2),\ a \neq 0$$

- Polinômios do 3º grau possuem exatamente três raízes complexas

$$ax^3 + bx^2 + cx + d \equiv a(x \quad \alpha_1)(x \quad \alpha_2)(x \quad \alpha_3),\ a \neq 0$$

- Polinômios do 4º grau possuem exatamente quatro raízes complexas

$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \equiv a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)(x - \alpha_4)$, $a \neq 0$

A tabela a seguir apresenta as fatorações de alguns polinômios do 2º grau:

Forma geral	Forma fatorada
$A(x) = x^2 + 3x + 2$	$A(x) = (x + 1)(x + 2)$
$B(x) = x^2 - 6x + 9$	$B(x) = (x - 3)(x - 3)$
$C(x) = 6x^2 + x - 1$	$C(x) = 6\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)$
$D(x) = x^2 + \pi x$	$D(x) = x(x + \pi)$
$E(x) = x^2 - 7$	$E(x) = (x - \sqrt{7})(x + \sqrt{7})$
$F(x) = x^2 + 4$	$F(x) = (x + 2i)(x - 2i)$

Há diversas técnicas que podem ser usadas na fatoração de polinômios do 2º grau. As identidades a seguir figuram entre os casos clássicos da fatoração algébrica:

- Fator comum: $a^2 + ab \equiv a(a + b)$
- Trinômios quadrados perfeitos: $\begin{cases} a^2 + 2ab + b^2 \equiv (a+b)^2 \\ a^2 - 2ab + b^2 \equiv (a-b)^2 \end{cases}$
- Diferença de quadrados: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

! Atenção

Lembrando que o universo dos coeficientes e raízes de um polinômio é o conjunto dos números complexos, deve-se considerar também o caso da soma de quadrados:

- Soma de quadrados: $a^2 + b^2 \equiv (a + bi)(a - bi)$

Observando a tabela anterior, o polinômio D(x) pode ser enquadrado no caso do fator comum e pode ser fatorado colocando-se a variável *x* em evidência: $x^2 + \pi x \equiv x(x + \pi)$. O polinômio B(x) no caso do trinômio quadrado perfeito: $x^2 - 6x + 9 = x^2 - 2 \cdot 3 \cdot x + 3^2 \equiv (x - 3)^2 \equiv$ $\equiv (x - 3)(x - 3)$. O polinômio E(x) no caso da diferença de quadrados: $x^2 \quad 7 \equiv x^2 \quad (\sqrt{7})^2 \quad (x + \sqrt{7})(x \quad \sqrt{7})$. O polinômio F(x) no caso da soma de quadrados: $x^2 + 4 \equiv x^2 - (2i)^2 \equiv$ $\equiv (x + 2i)(x - 2i)$.

Os polinômios A(x) e C(x) não caem nos casos clássicos de fatoração, mas podem ser fatorados com a utilização da técnica de agrupamento:

$$A(x) \equiv x^2 + 3x + 2 \equiv x^2 + \overbrace{x + 2x}^{3x} + 2 \equiv x(x + 1) + 2(x + 1) \equiv$$
$$\equiv (x + 1)(x + 2)$$

$$B(x) \equiv 6x^2 + x \equiv 1 \quad 6x^2 \quad \overbrace{3x \quad 2x}^{x} \; 1 \quad 3x(2x \quad 1) \quad 1(2x \quad 1) \equiv$$
$$\equiv (2x + 1)(3x - 1)$$

FRENTE 2

Observe que a fatoração por agrupamento efetuada no polinômio C(x) não obteve fatores unitários, sendo possível ainda colocar em evidência os coeficientes principais 2 e 3 dos fatores do 1º grau obtidos:

$$(2x+1)(3x-1) \equiv 2\left(x+\frac{1}{2}\right)\cdot 3\left(x-\frac{1}{3}\right) \equiv 6\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)$$

A técnica do agrupamento também pode ser usada na fatoração de polinômios de grau superior. Observe:

$$P(x) = \underbrace{x^3+2x^2}\underbrace{-9x-18} = x^2(x+2)-9(x+2) = (x+2)(x^2-9) = (x+2)(x+3)(x-3)$$

Gráficos de polinômios com coeficientes reais

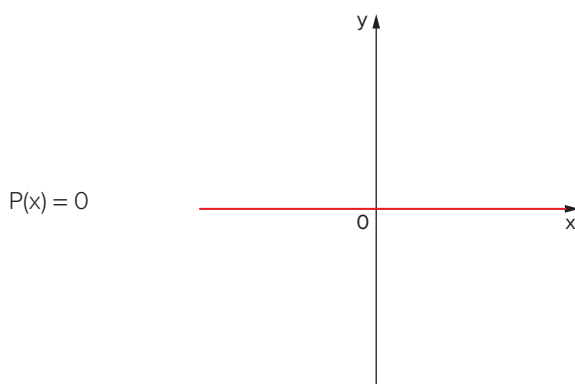
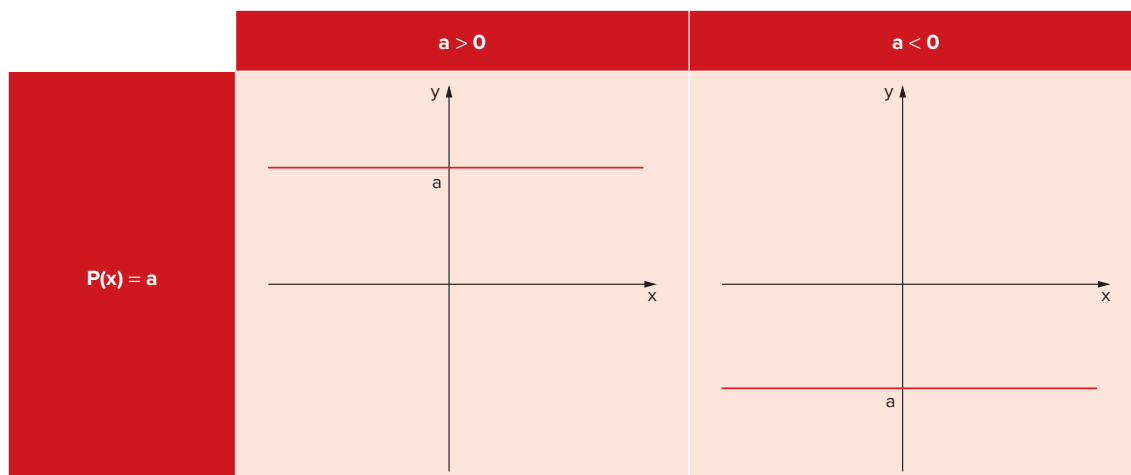
Considere um polinômio P(x) em que todos os coeficientes são números reais. Se a variável *x* desse polinômio também estiver restrita ao conjunto dos números reais, então a função y = P(x) pode ser representada graficamente no plano cartesiano.

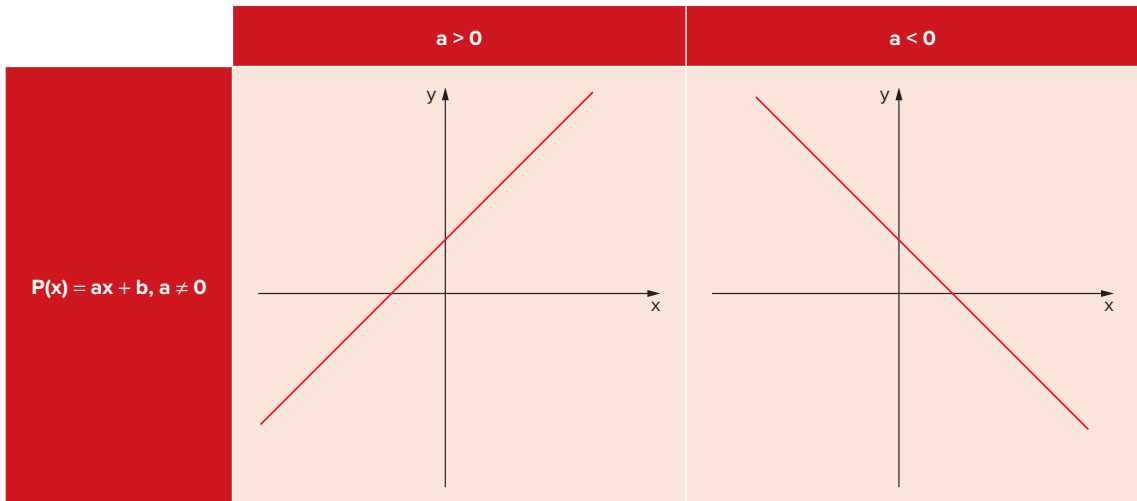
$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n$$
$$a_0 \neq 0,\ a_p \in \mathbb{R},\ \forall p,\ 0 \leq p \leq n,\ x \in \mathbb{R}$$

Revendo algumas funções reais

Algumas das funções polinomiais foram abordadas detalhadamente em capítulos anteriores, como as funções constantes, as funções do 1º grau (afins) e as do 2º grau (quadráticas). Segue uma breve revisão do comportamento gráfico dessas funções.

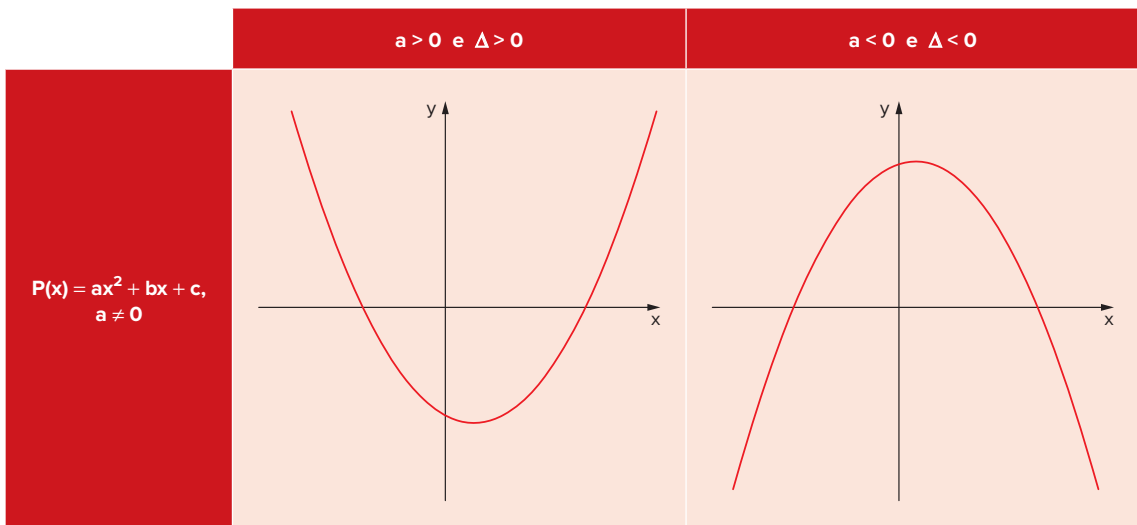
Função nula e funções constantes

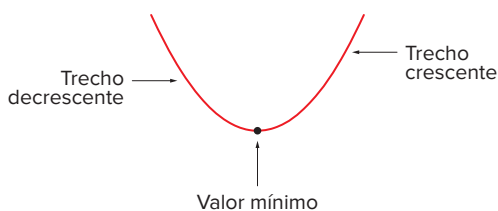
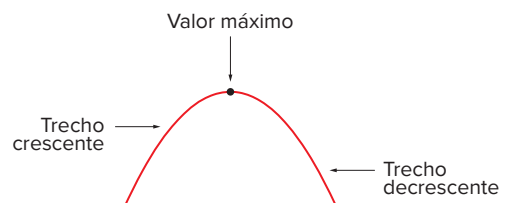
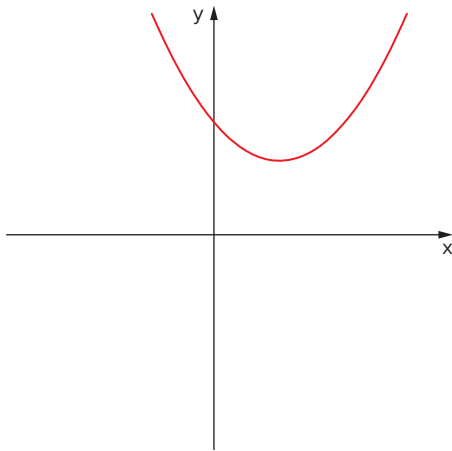
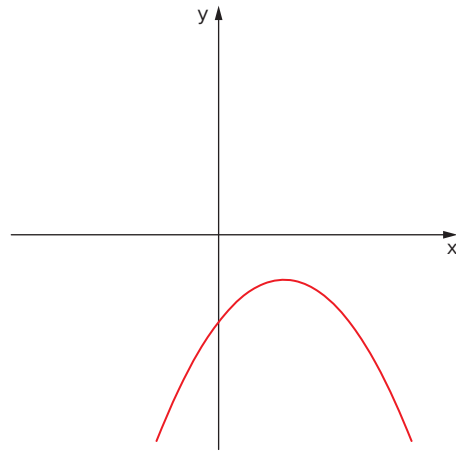
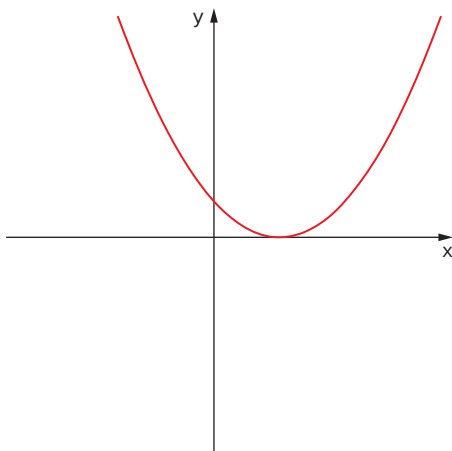
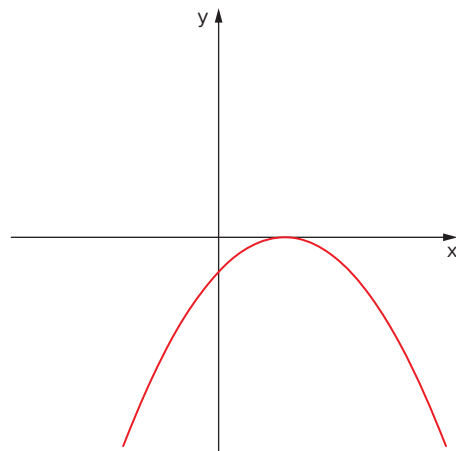
A representação gráfica do polinômio nulo é uma reta que coincide com o eixo das abscissas do plano cartesiano.

As representações gráficas dos polinômios constantes, mas não nulos, são retas paralelas ao eixo das abscissas do plano cartesiano.

Função afim

As representações gráficas dos polinômios do 1º grau são retas concorrentes aos eixos coordenados.

Sendo o domínio da função igual ao conjunto dos números reais, todas as funções polinomiais de grau $n \leq 1$, bem como o polinômio nulo, têm seus gráficos representados por linhas retas no sistema cartesiano. A partir do grau $n \geq 2$ não são mais retas que representam os gráficos das funções polinomiais de domínio real, mas curvas contínuas de vários tipos diferentes.

Função quadrática

As representações gráficas dos polinômios do 2º grau são parábolas com eixos de simetria verticais.

Quando o coeficiente principal do polinômio do 2º grau é positivo ($a > 0$), a parábola que representa o gráfico da função tem sua concavidade voltada para cima e quando esse coeficiente é negativo ($a < 0$) a parábola tem sua concavidade voltada para baixo.

Lendo o gráfico da esquerda para a direita:

Quando $a > 0$ a função do 2º grau tem seu primeiro trecho decrescente até atingir um valor mínimo e continua com um trecho crescente.

Quando $a < 0$ a função do 2º grau tem seu primeiro trecho crescente até atingir um valor máximo e continua com um trecho decrescente.

Embora possam admitir raízes complexas não reais, os polinômios de coeficientes reais e grau $n \geq 2$ sempre podem ser tratados como funções de domínio real e representados graficamente no plano cartesiano. Quando as raízes de um polinômio do 2º grau não são números reais, as parábolas que representam seus gráficos não interceptam o eixo das abscissas.

Particularmente, quando as duas raízes de um polinômio do 2º grau são iguais, as parábolas que representam seus gráficos tangenciam o eixo das abscissas.

Nesse caso, a abscissa do ponto de tangência é denominada **raiz dupla** do polinômio.

! Atenção

Se $P(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, é um polinômio de coeficientes reais, sua forma fatorada pode mudar ligeiramente de representação de acordo com o valor de seu discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$.

Quando $\Delta > 0$, o polinômio possui duas raízes reais e diferentes.

$$P(x) = a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)$$

Quando $\Delta = 0$, o polinômio possui uma raiz real dupla.

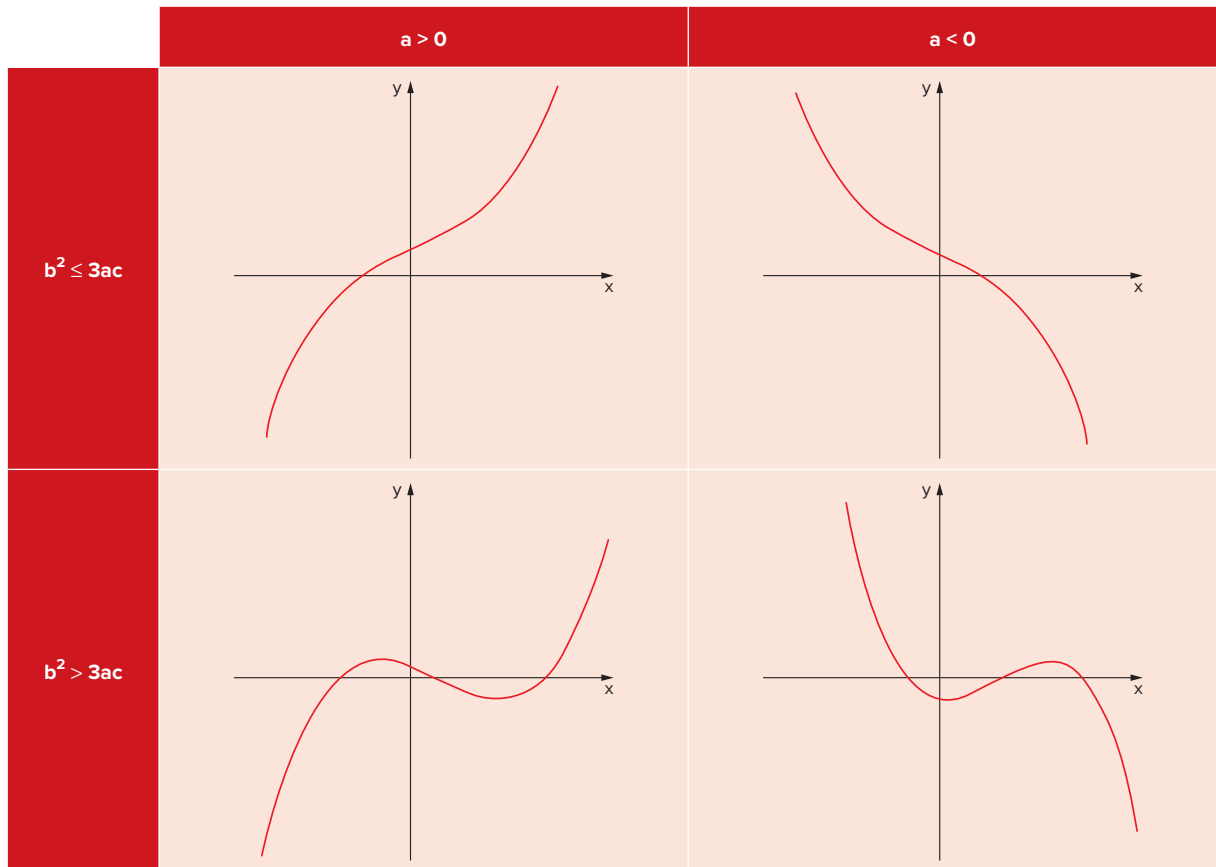
$$P(x) = a(x - \alpha)^2$$

Quando $\Delta < 0$, o polinômio possui duas raízes complexas conjugadas.

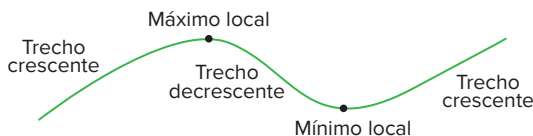
$$P(x) = a(x - z)(x - \overline{z})$$

Funções de 3º grau

As representações gráficas dos polinômios de 3º grau são curvas geométricas dotadas de duas concavidades voltadas para regiões opostas no plano cartesiano.

Seja $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, com $a \neq 0$, um polinômio do 3º grau. Veja os gráficos da função $y = P(x)$ considerando alguns parâmetros:

Nos casos em que $b^2 \leq 3ac$, se $a > 0$, então $y = P(x)$ é uma função crescente em toda sua extensão e se $a < 0$, então $y = P(x)$ é uma função decrescente em toda sua extensão.

Nos casos em que $b^2 > 3ac$:

- se $a > 0$, então $y = P(x)$ é uma função que alterna trechos: crescente, decrescente e crescente, nessa ordem.

- se $a < 0$, então $y = P(x)$ é uma função que alterna trechos: decrescente, crescente e decrescente, nessa ordem.

As formas fatoradas das funções polinomiais do 3º grau com coeficientes reais também podem mudar de acordo com as características de suas raízes.

- Se possuir três raízes reais distintas, sua forma fatorada será:

$$P(x) = a(x \quad \alpha_1)(x \quad \alpha_2)(x \quad \alpha_3)$$

- Se possuir apenas raízes reais, sendo uma simples outra dupla, sua forma fatorada será:

$$P(x) = a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)^2$$

- Se possuir raiz tripla, sua forma fatorada será:

$$P(x) = a(x - \alpha)^3$$

- Se possuir três raízes, sendo apenas uma delas real, sua forma fatorada será:

$$P(x) = a(x \quad \alpha)(x \quad z)(x \quad \bar{z})$$

Nessa última expressão, z e $\bar{z}$ representam duas raízes complexas conjugadas.

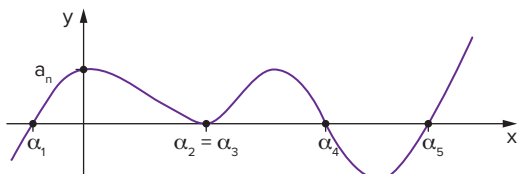
Funções de grau n > 3

Os formatos dos gráficos das funções polinomiais de 4º grau em diante são mais diversos, podendo até ser confundidos com gráficos de polinômios de grau inferior. Isso se deve ao padrão das concavidades das curvas que os representam no plano cartesiano, que muda a partir do 4º grau como mostra a tabela:

Grau do polinômio	Concavidades do gráfico
1º	Zero
2º	Uma
3º	Duas
4º	Três ou uma
5º	Quatro ou duas
6º	Cinco, três ou uma
⋮	⋮

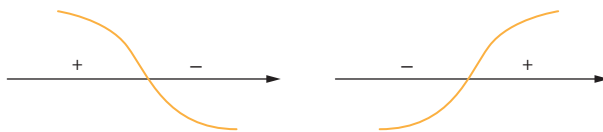
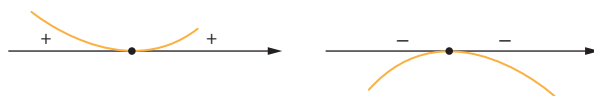
De forma genérica tem-se que:

Se P(x) tem grau par, então seu gráfico possui um número ímpar de concavidades.
Se P(x) tem grau ímpar, então seu gráfico possui um número par de concavidades.

Há uma série de outras generalidades a respeito dos gráficos de funções polinomiais de coeficientes reais, como o fato de todos serem representados por uma curva contínua que cruza o plano cartesiano da esquerda para a direita.

Ainda relacionando o grau do polinômio ao comportamento de seu gráfico, tem-se que:

- Se o grau do polinômio for par, então o primeiro e o último trecho de seu gráfico situam-se em um mesmo semiplano determinado pelo eixo das abscissas.
- Se o grau do polinômio for ímpar, então o primeiro e o último trecho de seu gráfico situam-se em semiplanos opostos pelo eixo das abscissas.

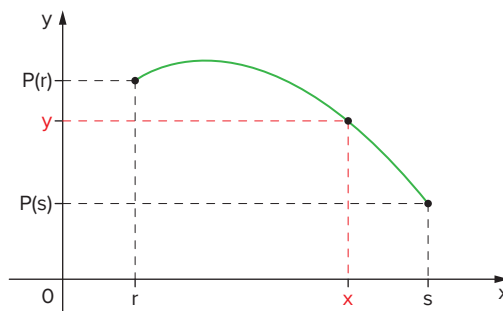
O gráfico de um polinômio intercepta o eixo das ordenadas sempre no termo independente da função, ou seja, no ponto de coordenadas $(0, a_n)$. Quando o gráfico de um polinômio intercepta o eixo das abscissas, isso ocorre sempre em alguma das raízes reais da função, ou seja, nos pontos de coordenadas $(\alpha_1, 0)$, $(\alpha_2, 0)$, ..., $(\alpha_n, 0)$.

Nas raízes do polinômio que são simples, triplas ou têm qualquer outra multiplicidade ímpar, as linhas que representam os gráficos das funções polinomiais atravessam o eixo das abscissas de um quadrante para outro no plano cartesiano. Quando isso ocorre, a função muda de sinal.

Nas raízes do polinômio que são duplas, quádruplas ou têm qualquer outra multiplicidade par, as linhas que representam os gráficos das funções polinomiais tangenciam o eixo das abscissas. Quando isso ocorre, a função se anula, mas mantém o sinal na vizinhança da raiz.

Considerando que o gráfico de uma função polinomial deve ser lido da esquerda para a direita, em relação ao sinal do coeficiente principal da função $a_0 \neq 0$, pode-se afirmar que:

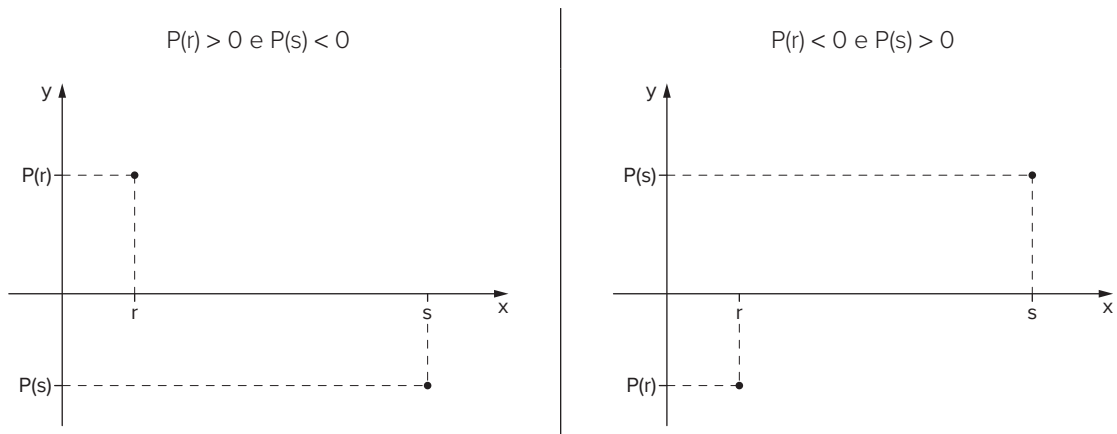
- Se a_0 é positivo ($a_0 > 0$), então o trecho final do gráfico situa-se no 1º quadrante do plano cartesiano.
- Se a_0 é negativo ($a_0 < 0$), então o trecho final do gráfico situa-se no 4º quadrante do plano cartesiano.

Teorema do valor intermediário

Enunciado pelos matemáticos Bernard Bolzano e Luis Cauchy, o teorema do valor intermediário é bastante intuitivo e trata de todas as funções contínuas, como as funções polinomiais.

Sendo P(x) um polinômio de coeficientes reais, considere os números reais *r* e *s*, tais que $r < s$. De acordo com este teorema, para todo *y* real, tal que $P(r) \leq y \leq P(s)$ ou $P(s) \leq y \leq P(r)$, existe pelo menos um *x* real, tal que $r \leq x \leq s$ satisfazendo $y = P(x)$. Embora as demonstrações algébricas do teorema sejam relativamente sofisticadas, ele pode ser compreendido observando-se o trecho correspondente ao intervalo [r, s] do gráfico cartesiano da função $y = P(x)$.

Desse teorema decorre que:

Se $P(r) \cdot P(s) < 0$, então P(x) possui pelo menos uma raiz real no intervalo]r, s[.

Dois casos distintos devem ser observados nessa proposição, pois se um produto de dois números reais é negativo, então os números multiplicados devem ter sinais contrários. Veja as duas situações:

O teorema do valor intermediário é suficiente para garantir a existência de raiz real do polinômio no intervalo]r, s[, mas não informa o número de raízes que pode haver. Veja algumas possibilidades gráficas de $y = P(x)$.

Raízes de P(x) no intervalo]r, s[	**Gráfico**
Uma raiz simples	y, P(a), a, b, x, P(b)
Uma raiz dupla e uma raiz simples	y, P(a), a, b, x, P(b)
Três raízes simples	y, P(a), a, b, x, P(b)

Quando $P(r) \cdot P(s) > 0$, não há garantias de que P(x) possua raízes reais no intervalo]r, s[.

Operações com polinômios

Considere os polinômios A(x) e B(x), ambos na forma geral:

$$A(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n,$$
$$a_0 \neq 0$$
$$B(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + ... + b_{m-2}x^2 + b_{m-1}x + b_m,$$
$$b_0 \neq 0$$

Note que os números naturais *m* e *n* indicam, respectivamente, os graus dos polinômios A(x) e B(x).

Conhecendo as séries de coeficientes de cada polinômio e seus respectivos graus, é possível efetuar as operações básicas de adição, subtração e multiplicações entre polinômios.

É possível, também, efetuar a divisão considerando que, assim como na operação de divisão entre números inteiros, a divisão polinomial possui mais de uma definição. Uma delas gera dois polinômios como resultados: o quociente Q(x) e o resto R(x).

$$\begin{array}{r|l} A(x) & B(x) \\ \hline R(x) & Q(x) \end{array}$$

A outra não considera o resto e gera apenas um resultado, que pode não ser um polinômio e sim uma função quociente.

$$A(x) : B(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$$

Adição de polinômios

Efetua-se a adição de dois polinômios A e B adicionando-se seus monômios de mesmo grau. Assim, A + B é um polinômio cujos coeficientes resultam da adição dos coeficientes dos termos de mesmo grau dos polinômios adicionados. Por isso, se os polinômios A e B tiverem graus diferentes ($n \neq m$), o grau do polinômio A + B será igual ao maior dos valores entre *m* e *n*.

$$gr(A) > gr(B) \Rightarrow gr(A + B) = gr(A)$$
$$gr(A) < gr(B) \Rightarrow gr(A + B) = gr(B)$$

Se os polinômios A e B tiverem o mesmo grau (n = m), então sua soma fica expressa por:

$$A(x) + B(x) = (a_0 + b_0)x^n + (a_1 + b_1)x^{n-1} + ... +$$
$$+ (a_{n-1} + b_{n-1})x + (a_n + b_n)$$

Neste caso, é possível que os coeficientes principais a_0 e b_0 se anulem, bem como os demais coeficientes somados, de modo que a soma produza como resultado um polinômio de grau menor do que o dos polinômios somados:

$$gr(A) = gr(B) \Rightarrow gr(A + B) \leq gr(A)$$

Como exemplos, considere os seguintes polinômios: $P(x) = x^3 - 5x^2 + 4x - 2$, $Q(x) = 3x^2 - 5x + 6$, $R(x) = 2x^3 - 4x + 7$ e $S(x) = -x^3 - 2x^2 + 1$. Vamos determinar algumas somas:

a. P(x) + Q(x)

$$\begin{array}{rcrrrr} P(x) & = & x^3 & -\ 5x^2 & +\ 4x & -\ 2 \\ Q(x) & = & & 3x^2 & -\ 5x & +\ 6 \quad + \\ \hline P(x) + Q(x) & = & x^3 & -\ 2x^2 & -\ \ x & -\ 4 \end{array}$$

Como gr(P) > gr(Q), a soma P(x) + Q(x) tem o grau do polinômio P(x).

b. P(x) + R(x)

$$\begin{array}{rcrrrr} P(x) & = & x^3 & \ \ 5x^2 & +\ 4x & \ \ 2 \\ R(x) & = & 2x^2 & & +\ 4x & +\ 7 \quad + \\ \hline P(x) + R(x) & = & 3x^3 & -\ 5x^2 & +\ 8x & +\ 5 \end{array}$$

Como gr(P) = gr(R) e os coeficientes principais desses polinômios não se anulam na adição, a soma P(x) + R(x) tem o mesmo grau dos polinômios P(x) e R(x).

c. P(x) + S(x)

$$\begin{array}{rcrrrr} P(x) & = & x^3 & -\ 5x^2 & +\ 4x & -\ 2 \\ S(x) & = & -x^3 & -\ 2x^2 & & +\ 1 \quad + \\ \hline P(x) + S(x) & = & & -\ 7x^2 & +\ 4x & -\ 1 \end{array}$$

Como gr(P) = gr(S) e os coeficientes principais desses polinômios anulam-se na adição, a soma P(x) + S(x) tem grau menor que o dos polinômios P(x) e S(x).

Propriedades da adição de polinômios

- **Associativa:** $[A(x) + B(x)] + C(x) \equiv A(x) + [B(x) + C(x)]$
- **Comutativa:** $A(x) + B(x) \equiv B(x) + A(x)$
- **Elemento neutro:** $A(x) + 0 \equiv A(x)$
- **Elemento simétrico:** $A(x) + [-A(x)] \equiv 0$

Saiba mais

Adição de polinômios idênticos

Quando se efetua a adição de dois ou mais polinômios idênticos, a soma desses polinômios também pode ser indicada pelo produto do polinômio por um número inteiro k > 1.

$$P(x) + P(x) \equiv 2 \cdot P(x)$$
$$P(x) + P(x) + P(x) \equiv 3 \cdot P(x)$$
$$\vdots$$
$$\underbrace{P(x) + P(x) + P(x) + ... + P(x)}_{\text{k polinômios}} \equiv k \cdot P(x)$$

Assim, sendo $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n\ \ 2}x^2 + a_{n\ \ 1}x + a_n$ com $a_0 \neq 0$, tem-se que:

$$k \cdot P(x) = (k \cdot a_0)x^n + (k \cdot a_1)x^{n\ \ 1} + (k \cdot a_2)x^{n\ \ 2} + ... + (k \cdot a_{n\ \ 2})x^2 +$$
$$+ (k \cdot a_{n\ \ 1})x + (k \cdot a_n)$$

Multiplicação de polinômio por um número real

O conceito de multiplicação de um polinômio por um número inteiro pode ser estendido para qualquer número complexo λ, de modo que se os coeficientes do polinômio P(x) formam a série (a_1, a_2, a_3, ..., a_n), então a série dos coeficientes do polinômio $\lambda \cdot P(x)$ será (λa_1, λa_2, λa_3, ..., λa_n), qualquer que seja $\lambda \in \mathbb{C}$.

Subtração de polinômios

Aproveitando o conceito da multiplicação de um polinômio por um número λ qualquer, particularmente quando $\lambda = -1$, tem-se que $\lambda \cdot P(x)$ representa o polinômio $-P(x)$, chamado polinômio oposto de $\lambda \cdot P(x)$.

Dessa forma, uma subtração de polinômios como $A(x) - B(x)$, por exemplo, pode ser definida pela soma do polinômio $A(x)$ com o oposto do polinômio $B(x)$.

$$A(x) \quad B(x) \equiv A(x) + [-B(x)]$$

Por exemplo, considere os polinômios $Q(x) = 3x^2 - 5x + 6$ e $P(x) = x^3 - 5x^2 + 4x - 2$. Vamos obter a soma $P(x) + [-Q(x)]$:

$$\begin{array}{rrrrrrrrr} P(x) = & x^3 & & 5x^2 & + & 4x & & 2 & \\ -Q(x) = & & - & 3x^2 & + & 5x & - & 6 & + \\ \hline P(x) - Q(x) = & x^3 & - & 8x^2 & + & 9x & - & 8 & \end{array}$$

Multiplicação de polinômios

O produto entre dois polinômios obedece à propriedade distributiva da multiplicação.

Seja $M(x)$ o produto do polinômio $P(x) = x^3 - 5x^2 + 4x - 2$ pelo polinômio $Q(x) = 3x^2 - 5x + 6$:

$$M(x) = P(x) \cdot Q(x)$$

Aplicando a propriedade distributiva termo a termo, temos:

$$M(x) = (x^3 \quad 5x^2 \cdot \quad 4x \quad 2) \;\; Q(x)$$
$$M(x) = x^3 \cdot Q(x) - 5x^2 \cdot Q(x) + 4x \cdot Q(x) - 2 \cdot Q(x)$$
$$M(x) = x^3(3x^2 - 5x + 6) - 5x^2(3x^2 - 5x + 6) + 4x(3x^2 - 5x + 6) - 2(3x^2 - 5x + 6)$$

Agora, distribuindo as multiplicações indicadas por cada termo do polinômio Q e alinhando pelo grau os termos resultantes:

$$\begin{array}{rrrrrrr} & 3x^5 - & 5x^4 + & 6x^3 & & & \\ & & 15x^4 + & 25x^3 & 30x^2 & & \\ & & + & 12x^3 - & 20x^2 + & 24x & \\ & & & & 6x^2 + & 10x & 12 \\ \hline M(x) = & 3x^5 & 20x^4 + & 43x^3 & 56x^2 + & 34x & 12 \end{array}$$

$$M(x) = P(x) \cdot Q(x) = 3x^5 - 20x^4 + 43x^3 - 56x^2 + 34x - 12$$

Também podemos distribuir a multiplicação do polinômio P(x) por cada um dos termos de Q(x):

$$M(x) = P(x) \cdot (3x^2 - 5x + 6)$$
$$M(x) = P(x) \cdot 3x^2 + P(x) \cdot (-5x) + P(x) \cdot 6$$
$$M(x) = (x^3 \quad 5x^2 \cdot \quad 4x + 2) \;\; 3x^2 \quad (x^3 + 5x^2 + 4x \quad 2) \;\; (\quad 5x) \quad (x^3 \quad 5x^2 \quad 4x \quad \cdot 2) \;\; 6$$

Novamente, distribuindo as multiplicações indicadas por cada termo do polinômio P(x) e alinhando pelo grau os termos resultantes:

$$\begin{array}{rrrrrrr} & 3x^5 - & 15x^4 + & 12x^3 - & 6x^2 & & \\ & - & 5x^4 + & 25x^3 - & 20x^2 + & 10x & \\ & & + & 6x^3 - & 30x^2 + & 24x - & 12 \\ \hline M(x) = & 3x^5 - & 20x^4 + & 43x^3 - & 56x^2 + & 34x - & 12 \end{array}$$

Observação: O grau do produto de polinômios é igual à soma dos graus de cada polinômio multiplicado:

$$gr(A \cdot B) = gr(A) + gr(B)$$

Propriedades da multiplicação de polinômios

- **Associativa:** $[A(x) \cdot B(x)] \cdot C(x) \equiv A(x) \cdot [B(x) \cdot C(x)]$
- **Comutativa:** $A(x) \cdot B(x) \equiv B(x) \cdot A(x)$
- **Elemento neutro:** $A(x) \cdot 1 \equiv A(x)$
- **Distributiva:** $A(x) \cdot [B(x) + C(x)] \equiv A(x) \cdot B(x) + A(x) \cdot C(x)$

Divisão de polinômios

A divisão polinomial é uma operação não comutativa, que só pode ser aplicada a dois polinômios A(x) dividendo e B(x) divisor de cada vez.

$$A(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n,\ a_0 \neq 0$$
$$B(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \ldots + b_{m-2}x^2 + b_{m-1}x + b_m,\ b_0 \neq 0$$

Esta operação produz dois outros polinômios como resultados: o polinômio quociente Q(x) e o polinômio resto R(x).

A divisão entre os polinômios A(x) e B(x) podem ser representadas no algoritmo a seguir:

$$\begin{array}{l|l} A(x) & B(x) \\ \hline R(x) & Q(x) \end{array}$$

Considerando os graus dos polinômios A(x) e B(x), temos as seguintes situações:

I. Se gr(A) < gr(B), então o quociente Q(x) da divisão de A(x) por B(x) é o polinômio nulo e o resto R(x) é idêntico ao dividendo A(x):

$$n < m \Rightarrow \begin{cases} Q(x) \equiv 0 \\ R(x) \equiv A(x) \end{cases}$$

II. Se gr(A) = gr(B), então o quociente da divisão de A(x) por B(x) é uma constante $q \neq 0$ e o resto é idêntico ao inverso dessa constante multiplicado pelo dividendo A(x):

$$n = m \Rightarrow \begin{cases} Q(x) \equiv q \neq 0 \\ R(x) \equiv \dfrac{1}{q} \cdot A(x) \end{cases}$$

III. Se gr(A) > gr(B), então aplica-se o algoritmo da divisão de A(x) por B(x) para gerar os polinômios quociente e resto. Mas em relação ao grau de cada polinômio gerado:

$$n > m \Rightarrow \begin{cases} gr(Q) = n - m \\ gr(R) < m \text{ ou } R(x) \equiv 0 \end{cases}$$

Nesse último caso, a divisão do polinômio A(x) pelo polinômio B(x) deve ser efetuada de acordo com o algoritmo descrito a seguir:

1º) Divide-se o termo de maior grau de A pelo termo de maior grau de B, obtendo-se o termo de maior grau do quociente.

$$\begin{array}{l|l} a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n & b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m \\ \hline & \dfrac{a_0}{b_0}x^{n-m} \end{array}$$

2º) Multiplica-se o termo do quociente obtido por cada termo do divisor e indicam-se os monômios resultantes com seus sinais trocados abaixo dos termos semelhantes do dividendo.

$$\begin{array}{l|l} a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n & b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m \\ \hline -a_0x^n - \dfrac{a_0b_1}{b_0}x^{n-1} - \ldots & \dfrac{a_0}{b_0}x^{n-m} \end{array}$$

3º) Adicionam-se os polinômios indicados do lado esquerdo do esquema, obtendo-se um polinômio que pode ser tanto um resto parcial quanto o resto final da divisão.

$$\begin{array}{l|l} a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n & b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m \\ \hline -a_0x^n - \dfrac{a_0b_1}{b_0}x^{n-1} - \ldots & \dfrac{a_0}{b_0}x^{n-m} \\ \hline \left(a_1 - \dfrac{a_0b_1}{b_0}\right)x^{n-1} + \ldots & \end{array}$$

4º) Se o polinômio gerado pela adição no passo anterior tiver grau menor que o do divisor, então o polinômio obtido é o resto e a divisão é finalizada; caso contrário, trata-se apenas de um resto parcial e o algoritmo retorna ao 1º passo, para que se continue o processo da divisão.

Considerando os polinômios $A(x) = x^5 + 2x^4 + 8x^3 + 4x^2 + 5x + 2$ e $B(x) = x^3 + x^2 + 2x \quad 3$, vamos efetuar $A(x) : B(x)$:

- Os termos de maior grau do dividendo e do divisor são, respectivamente, x^5 e x^3. Dividindo um pelo outro, tem-se: $x^5 : x^3 = x^{5-3} = x^2$, assim:

$$\begin{array}{r|l} x^5 + 2x^4 + 8x^3 + 4x^2 + 5x + 2 & x^3 + x^2 + 2x - 3 \\ \hline & x^2 \end{array}$$

- O produto de x^2 pelo polinômio divisor é $x^2(x^3 + x^2 + 2x \quad 3) = x^5 + x^4 + 2x^3 \quad 3x^2$ e, sendo o polinômio oposto a esse produto $\quad x^5 \quad x^4 \quad 2x^3 + 3x^2$, escreve-se:

$$\begin{array}{r|l} x^5 + 2x^4 + 8x^3 + 4x^2 + 5x + 2 & x^3 + x^2 + 2x - 3 \\ \hline x^5 \quad x^4 \quad 2x^3 + 3x^2 & x^2 \end{array}$$

- Adicionando se os polinômios escritos do lado esquerdo do esquema:

$$\begin{array}{r|l} x^5 + 2x^4 + 8x^3 + 4x^2 + 5x + 2 & x^3 + x^2 + 2x - 3 \\ \hline x^5 \quad x^4 \quad 2x^3 + 3x^2 & x^2 \\ \hline x^4 + 6x^3 + 7x^2 + 5x + 2 & \end{array}$$

- Como o último passo gerou um polinômio de 4º grau e o divisor é do 3º grau, o resto é apenas parcial e a divisão continua.
- O termo de maior grau deste resto parcial é x^4, que dividindo pelo termo x^3 do divisor resulta no monômio $x^{4-3} = x$, e assim obtém-se mais um termo do quociente:

$$\begin{array}{r|l} x^5 + 2x^4 + 8x^3 + 4x^2 + 5x + 2 & x^3 + x^2 + 2x \quad 3 \\ \hline -x^5 - x^4 - 2x^3 + 3x^2 & x^2 + x \\ \hline x^4 + 6x^3 + 7x^2 + 5x + 2 & \end{array}$$

- O produto do termo x pelo divisor $x^3 + x^2 + 2x - 3$ é $x^4 + x^3 + 2x^2 - 3x$, cujo polinômio oposto é $-x^4 - x^3 - 2x^2 + 3x$ e deve ser escrito logo abaixo do último resto parcial para que a soma desses polinômios gere um novo resto na divisão. Assim:

$$\begin{array}{r|l} x^5 + 2x^4 + 8x^3 + 4x^2 + 5x + 2 & x^3 + x^2 + 2x - 3 \\ \hline -x^5 - x^4 - 2x^3 + 3x^2 & x^2 + x \\ \hline x^4 + 6x^3 + 7x^2 + 5x + 2 & \\ -x^4 - x^3 - 2x^2 + 3x & \\ \hline 5x^3 + 5x^2 + 8x + 2 & \end{array}$$

- Como esse novo resto ainda é do 3º grau, igual ao grau do divisor, a divisão prossegue com a última aplicação dos passos desse algoritmo.
- O termo de maior grau desse novo resto $5x^3$ dividido pelo termo x^3 do divisor resulta no monômio constante $5x^{3-3} = 5x^0 = 5$, que é o termo independente do quociente:

$$\begin{array}{r|l} x^5 + 2x^4 + 8x^3 + 4x^2 + 5x + 2 & x^3 + x^2 + 2x - 3 \\ \hline -x^5 - x^4 - 2x^3 + 3x^2 & x^2 + x + 5 \\ \hline x^4 + 6x^3 + 7x^2 + 5x + 2 & \\ x^4 \quad x^3 \quad 2x^2 + 3x & \\ \hline 5x^3 + 5x^2 + 8x + 2 & \end{array}$$

- Neste ponto a execução do algoritmo já fornece o polinômio quociente da divisão:

$$Q(x) = x^2 + x + 5$$

- Continuando os passos do algoritmo, obtém-se o resto final da divisão:

$$\begin{array}{r|l}
x^5 + 2x^4 + 8x^3 + 4x^2 + 5x + 2 & x^3 + x^2 + 2x \quad 3 \\ \cline{2-2}
-x^5 - x^4 - 2x^3 + 3x^2 \qquad\qquad & x^2 + x + 5 \\ \cline{1-1}
x^4 + 6x^3 + 7x^2 + 5x + 2 & \\
-x^4 - x^3 - 2x^2 + 3x \qquad & \\ \cline{1-1}
5x^3 + 5x^2 + 8x + 2 & \\
-5x^3 - 5x^2 - 10x + 15 & \\ \cline{1-1}
2x + 17 &
\end{array}$$

Logo, na divisão de A(x) por B(x) obtemos $Q(x) = x^2 + x + 5$ e $R(x) = \quad 2x + 17$.

Se o polinômio dividendo possuir coeficientes nulos, recomenda-se que eles sejam escritos de forma explícita, pois isso facilita a obtenção dos restos parciais no processo da divisão. Note que, na divisão do trinômio $M(x) = 2x^4 + 3x \quad 10$ pelo binômio $N(x) = x^2 + 3$, por exemplo, deve-se representar o dividendo escrevendo-se $M(x) = 2x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 3x \quad 10$. O mesmo pode ser feito com o divisor $N(x) = x^2 + 0x + 3$.

$$\begin{array}{r|l}
2x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 3x \quad 10 & x^2 + 0x + 3 \\ \cline{2-2}
2x^4 \quad 0x^3 \quad 6x^2 \qquad\qquad & 2x^2 \quad 6 \\ \cline{1-1}
-6x^2 + 3x - 10 & \\
-6x^2 + 0x + 18 & \\ \cline{1-1}
3x + 8 &
\end{array}$$

Assim, na divisão de M(x) por N(x) obtemos $Q(x) = 2x^2 - 6$ e o resto $R(x) = 3x + 8$.

! Atenção

Quando a divisão de um polinômio A(x) por um polinômio B(x) tem como resto o polinômio nulo, tem-se que:

- O polinômio A(x) é divisível pelo polinômio B(x).
- O polinômio B(x) é um dos fatores do polinômio A(x).

O método de Descartes

Sem contar os restos parciais de uma divisão polinomial, os principais polinômios envolvidos são: o dividendo A(x), o divisor B(x), o quociente Q(x) e o resto final R(x).

$$\begin{array}{c|c}
A(x) & B(x) \\ \cline{2-2}
R(x) & Q(x)
\end{array}$$

Esses quatro polinômios podem ser relacionados pela identidade a seguir:

$$A(x) \equiv B(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

Dessa expressão é possível extrair relações lineares entre os coeficientes dos polinômios envolvidos, efetuando as operações apresentadas no 2º membro e comparando as séries de coeficientes obtidas com a do 1º membro, ou mesmo fazendo-se atribuições numéricas adequadas para a variável *x*.

Considere a divisão do trinômio $M(x) = 2x^4 + 3x - 10$ pelo binômio $N(x) = x^2 + 3$, por exemplo.

O polinômio quociente dessa divisão é do 2º grau, pois: $gr(Q) = gr(M) - gr(N) = 4 - 2 = 2$.

Assim, devem existir coeficientes *a*, *b* e *c* tais que $Q(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$.
O resto dessa divisão é um polinômio do 1º grau, no máximo: $gr(R) < gr(N) \Rightarrow gr(R) < 2$.
Assim, também devem existir coeficientes *p* e *q* tais que: $R(x) = px + q$.
Então, da identidade $M(x) \equiv N(x) \cdot Q(x) + R(x)$, tem-se:

$$2x^4 + 3x - 10 \equiv (x^2 + 3)(ax^2 + bx + c) + px + q$$

Multiplicando o quociente pelo divisor:

$$2x^4 + 3x - 10 = ax^4 + 3ax^2 + bx^3 + 3bx + cx^2 + 3c + px + q$$

Agrupando os termos semelhantes no 2º membro:

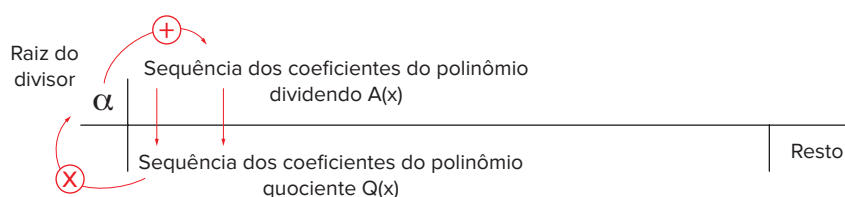
$$2x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 3x \quad 10 \equiv ax^4 + bx^3 + (3a + c)x^2 + (3b + p)x + (3c + q)$$

Comparando as séries de coeficientes, obtém-se o sistema: $\begin{cases} a = 2 \\ b = 0 \\ 3a + c = 0 \\ 3b + p = 3 \\ 3c + q = \quad 10 \end{cases}$.

Resolvendo esse sistema, obtemos: $\begin{cases} a = 2 \\ b = 0 \\ c = -6 \\ p = 3 \\ q = 8 \end{cases}$,

Portanto, obtém-se o quociente $Q(x) = 2x^2 + 0x - 6 = 2x^2 - 6$ e o resto $R(x) = 3x + 8$.

Dispositivo prático de Ruffini

O dispositivo prático de Ruffini é um algoritmo criado pelo matemático italiano Paolo Ruffini para facilitar o processo da divisão de um polinômio A(x) por binômios B(x) que sejam unitários e do 1º grau. Assim, esse dispositivo prático só deve ser aplicado quando o divisor for um polinômio da forma $(x - \alpha)$. Veja o esquema:

O algoritmo obedece aos seguintes passos:

1º) Na primeira posição da primeira linha escreve-se a raiz α do divisor $(x - \alpha)$.
2º) Ainda na primeira linha, escreve-se a série dos coeficientes do dividendo, usando zeros para indicar os coeficientes dos termos ocultos.
3º) Copia-se o coeficiente principal do polinômio A(x) logo abaixo na segunda linha, multiplica-se o seu valor pelo número α e adiciona-se o resultado ao próximo coeficiente de A(x), escrevendo a soma na segunda linha, logo abaixo do coeficiente secundário de A(x).
4º) Cada número escrito na segunda linha é multiplicado por α e depois somado ao próximo coeficiente de A(x), até que seja escrito um número logo abaixo do termo independente de A(x).
5º) Separa-se com um traço vertical o último número escrito na segunda linha.
6º) Terminado o processo, tem-se, na segunda linha do esquema, que os números escritos antes do traço vertical formam a série de coeficientes do quociente da divisão e o número no final, que foi separado pelo traço, é o valor do resto dessa divisão.

Como este algoritmo só pode ser aplicado em divisões por polinômios do 1º grau, o resto é, necessariamente, uma função constante. Assim, a identidade do método de Descartes fica particularmente expressa por:

$$A(x) \equiv (x - \alpha) \cdot Q(x) + r$$

Considere a divisão do polinômio $A(x) = 2x^3 + 4x^2 \quad 23x + 38$ pelo binômio $(x + 5)$, por exemplo.
Como a raiz do binômio $(x + 5)$ é $\alpha = -5$, escreve-se:

FRENTE 2

Como a sequência dos coeficientes de A(x) é (2, 4, 23, 38), escreve-se na primeira linha:

5	2	4	23	38

Copia-se o coeficiente principal do polinômio A(x) na segunda linha, logo abaixo de sua posição original:

–5	2	4	–23	38
	2			

O produto desse coeficiente pela raiz do divisor somado ao próximo coeficiente de A(x) é:

$$2 \cdot (-5) + 4 = 10 + 4 = 6$$

Escreve-se então esse número na segunda linha, dando continuidade à série de coeficientes do quociente:

–5	2	4	–23	38
	2	–6		

Repetindo o procedimento de multiplicar o número escrito na segunda linha pela raiz do divisor e somar o resultado ao próximo coeficiente de A(x), obtém-se $-6 \cdot (-5) + (-23) = 30 - 23 = 7$, que também deve ser escrito na segunda linha:

–5	2	4	–23	38
	2	–6	7	

Com mais uma aplicação do procedimento encontra-se: $7 \cdot (-5) + 38 = -35 + 38 = 37$.

Então, escreve-se esse número no final da segunda linha, separado por um traço vertical:

–5	2	4	–23	38
	2	–6	7	3

Assim, obtemos o quociente $Q(x) = 2x^2 - 6x + 7$ e o resto r = 3.

Exercício resolvido

4 Efetue a divisão do polinômio $P(x) = x^3 + 4x^2 - 3$ pelos seguintes polinômios:

a) $x - 2$
b) $x + 1$
c) x
d) $x - i$

Resolução:

Considerando que a série dos coeficientes do polinômio P(x) é (1, 4, 0, –3), podemos aplicar o dispositivo prático em cada item.

a) A raiz do divisor $x - 2$ é $\alpha = 2$.

2	1	4	0	–3
	1	6	12	21

Logo, obtemos o quociente $Q(x) = x^2 + 6x + 12$ e resto r = 21.

b) A raiz do divisor $x + 1$ é $\alpha = -1$.

–1	1	4	0	–3
	1	3	–3	0

Logo, obtemos o quociente $Q(x) = x^2 + 3x - 3$ e resto r = 0.

Observação: P(x) é um polinômio divisível por (x + 1).

c) A raiz do divisor x é $\alpha = 0$.

0	1	4	0	–3
	1	4	03	

Logo, obtemos o quociente $Q(x) = x^2 + 4x$ e resto r = –3.

d) A raiz do divisor $x - i$, é a unidade imaginária $\alpha = i$.

i	1	4	03	
	1	4 + i	–1 + 4i	–7 – i

Logo, obtemos o quociente $Q(x) = x^2 + (4 + i)x +$ + (1 + 4i) e resto r = 7 i.

Atenção

Quando se obtém resto nulo na divisão de um polinômio P(x) por um binômio da forma $(x - \alpha)$, pode-se afirmar que:

- O dividendo $(x - \alpha)$ está presente na forma fatorada do polinômio P(x).
- O número α é também uma raiz do polinômio P(x).

Teorema do resto

Esse teorema é consequência direta da identidade polinomial expressa pelo método de Descartes.

$$P(x) \equiv d(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

em que P(x), d(x), Q(x) e R(x) são, respectivamente, dividendo, divisor, quociente e resto de uma divisão polinomial.

Enunciando, temos:

O resto da divisão de um polinômio P(x) por um binômio do tipo $(x - \alpha)$ é $P(\alpha)$.

Se d(x) for um polinômio do 1º grau, então R(x) será uma função constante. Assim:

$$P(x) \equiv \underset{\downarrow 1^{\circ}\text{ grau}}{d(x)} \cdot Q(x) + \underset{\downarrow \text{Constante}}{R(x)}$$

$$P(x) \equiv (x - \alpha) \cdot Q(x) + r$$

Então, fazendo $x = \alpha$, tem-se que:

$$P(\alpha) \equiv (\alpha - \alpha) \cdot Q(\alpha) + r$$

Portanto:

$$P(\alpha) \equiv 0$$

Divisibilidade de polinômios

Quando o resto da divisão de um polinômio A(x) por um polinômio B(x) for nulo, então, sendo Q(x) o quociente, tem-se a identidade:

$$A(x) \equiv B(x) \cdot Q(x)$$

É correto afirmar que:

- A(x) é um polinômio divisível tanto por B(x) quanto por Q(x).
- B(x) é o quociente da divisão de A(x) por Q(x).
- As raízes do polinômio B(x) também são raízes do polinômio A(x).
- As raízes do polinômio Q(x) também são raízes do polinômio A(x).
- O conjunto das raízes de A(x) é a união dos conjuntos das raízes de B(x) e Q(x).

Saiba mais

Teorema de D'Alambert

Um polinômio P(x) é divisível por um binômio ax + b se e somente se $P\left(-\frac{b}{a}\right) = 0$.

Revisando

1 Considere o polinômio $P(x) = 2x^3 + 3x^5 - 5x(1 - x) + 4x^0 + 7(x + 2)$ e faça o que se pede em cada um dos seguintes itens.

a) Determine o grau do polinômio P.
b) Determine o termo independente do polinômio P.
c) Escreva a sequência dos coeficientes numéricos do polinômio P.
d) Calcule P(1).
e) Calcule P(i).

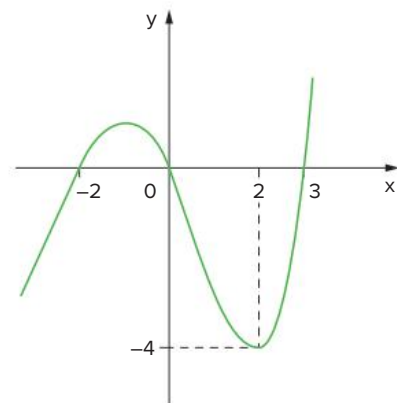
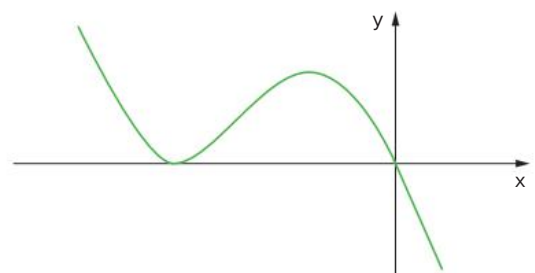
2 Discutir, em função do parâmetro *m*, o grau do polinômio:

$$P(x) = (m^2 - 2m)x^4 + mx^3 + (m - 2)x^2 + 5x + 1$$

3 Considere os polinômios A(x) e B(x), do 3º grau, definidos a seguir, e faça o que se pede.

$$A(x) = (x - 2)(x - 3)(x - 4)$$
$$B(x) = x^3 - 9x^2 + 26x - 24$$

a) Determine o termo independente do polinômio A(x).
b) Determine o termo independente do polinômio B(x).
c) Determine a soma dos coeficientes do polinômio A(x).
d) Determine a soma dos coeficientes do polinômio B(x).
e) Determine o conjunto das raízes do polinômio A(x).
f) Calcule A(–1), B(1), A(10) e B(10).
g) Mostre que $A(x) \equiv B(x)$.
h) Calcule A(i) e B(i).
i) Determine o conjunto das raízes do polinômio B(x).
j) Esboce os gráficos dos polinômios A(x) e B(x).
k) Resolva a inequação $x^3 \quad 9x^2 + 26x \quad 24 < 0$.

4 Escreva, na forma geral, o polinômio do 3º grau que modela o gráfico a seguir.

5 Qual polinômio pode estar representado no gráfico a seguir?

A $x^2(x + 3)$
B $-x(x + 5)^2$
C $-x^3(x + 2)$
D $x^2(4 - x^2)$
E $x^2(x - 7)$

6 Considere os polinômios P(x), Q(x) e R(x):

$$P(x) = x^3 \quad 5x^2 + 4x \quad 2$$
$$Q(x) = -x^3 - 2x^2 + 7$$
$$R(x) = 3x^2 - 5x + 6$$

Agora, determine os polinômios definidos em cada item:

a) $A(x) = P(x) + Q(x) + R(x)$

b) $B(x) = xP(x) - 2Q(x)$

c) $C(x) = P(x) \cdot R(x)$

d) $D(x) = P(2x) + R(x - 1)$

7 Efetue a divisão do polinômio A(x) pelo polinômio B(x) sendo:

$$A(x) = x^5 - 6x^4 + 14x^3 - 23x^2 + 19x - 15$$
$$B(x) = -x^3 + 4x^2 + 3x + 8$$

8 Sendo o polinômio $P(x) = x^3 + 4x^2 \quad 2x \quad 5$, determine o quociente e resto das divisões de P(x) pelos seguintes polinômios:

a) $x - 2$

b) $x + 1$

c) x

d) $x - i$

9 Determine os coeficientes *m* e *n* de modo que o polinômio $P(x) = x^3 + mx^2 + nx + m$ seja divisível pelos polinômios $(x - 3)$ e $(x^2 + 1)$.

10 **Fuvest** P(x) é um polinômio de grau maior ou igual a 2 e tal que $P(1) = 2$ e $P(2) = 1$.
Sejam $D(x) = (x - 2) \cdot (x - 1)$ e Q(x) o quociente da divisão de P(x) por D(x).

a) Determine o resto da divisão de P(x) por D(x).

b) Sabendo que o termo independente de P(x) é 8, determine o termo independente de Q(x).

Exercícios propostos

1 Se P e Q são polinômios na variável *x* de graus *m* e *n*, respectivamente, tal que $0 < n < m$, então o grau do polinômio $(P - Q)(P + Q)$ deve ser

A m
B n
C 2m
D 2n
E m + n

2 Dados os polinômios $P_1(x) = x^3 + mx^2 + nx + 8$ e $P_2(x) = x^2 + mx + n$ e sabendo que $P_1(\; 1) = Q(3)$ e $P_2(0) = \; 7$, os valores de *m* e *n*, são, respectivamente,

A –6 e –7.
B –6 e 1.
C 6 e –7.
D 6 e 7.
E –6 e –1.

3 **Uece 2019** Considerando o polinômio $P(x) = 4x^3 + 8x^2 + x + 1$ é correto afirmar que o valor da soma $P(\; +1) \quad P\left(\; \frac{1}{3}\right)$ é um número localizado entre

A 5,0 e 5,5.
B 4,0 e 4,5.
C 4,5 e 5,0.
D 5,5 e 6,0.

4 **IFSC** Dada a função polinomial $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$, o valor de $f(-3) + f(0) + f(f(-1))$ é:

A –20
B –18
C –16
D 20
E 16

5 **Cefet-MG** O valor numérico da expressão $2x^3 \; +x^2 \quad \frac{x}{2} \quad 1$ para $x = \sqrt{3}$ é

A $\frac{10 - \sqrt{3}}{2}$

B $\frac{4 + \sqrt{3}}{2}$

C $4\left(\sqrt{3} \quad 1\right)$

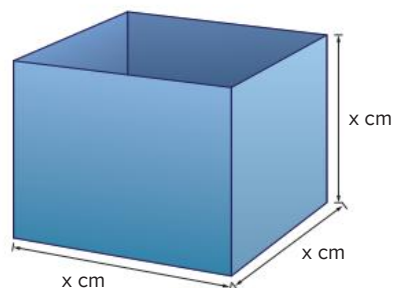
D $\frac{13\sqrt{3} - 8}{2}$

6 Sobre dois polinômios do 3º grau A(x) e B(x), são feitas as seguintes afirmações:

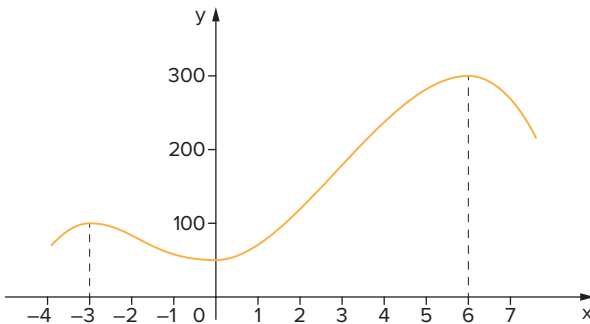
I. A(x) + B(x) resulta num polinômio do 3º grau.
II. A(x) · B(x) resulta num polinômio do 6º grau.

Então, podemos concluir que:

A A afirmação I não é necessariamente correta; a afirmação II é necessariamente correta.
B A afirmação I é necessariamente correta; a afirmação II não é necessariamente correta.
C As duas afirmações são, necessariamente, corretas.
D A afirmação I está correta se e somente se a afirmação II também estiver correta.
E Nenhuma das duas afirmações é necessariamente correta.

7 Considere uma caixa cúbica de madeira sem tampa, cuja aresta mede *x* cm.

Se as placas de madeira usadas na confecção das faces laterais e da base a caixa têm 1 cm de espessura, então o volume de ar em centímetros cúbicos compreendido pela caixa pode ser expresso por:

A $x^3 + 5x^2 - 8x + 4$
B $x^3 - 5x^2 + 8x - 4$
C $x^3 + 5x^2 + 8x - 4$
D $x^3 - 5x^2 + 8x + 4$
E $x^3 - 5x^2 - 8x - 4$

8 Em dias de greve de funcionários do transporte público o departamento de trânsito de certa cidade utiliza o polinômio $P(x) = -0{,}25x^4 + x^3 + 9x^2 + 50$ para estimar o número de quilômetros de engarrafamentos em função do número *x* de horas antes ou depois do meio-dia, de modo que $x = 0$ representa meio-dia (12 horas), $x = 1$ representa 13 horas e $x = -1$ representa 11 horas, por exemplo. A figura a seguir mostra o gráfico da função $y = P(x)$.

De acordo com o gráfico e com a forma algébrica da função $y = P(x)$, o número máximo de quilômetros de engarrafamento que pode ser estimado por esse polinômio é igual a:

A 280 km.
B 266 km.
C 250 km.
D 232 km.
E 220 km.

9 **UEG 2015** Se o coeficiente do termo de maior grau de um polinômio do 4º grau é 1 e suas raízes são $x_1 = 2i$, $x_2 = -2i$, $x_3 = 3$ e $x_4 = 4$, então o polinômio em questão é

A $x^4 - 7x^3 + 16x^2 - 28x + 48$
B $x^4 - 2ix^3 + 2ix^2 + 3x + 4$
C $x^4 + 16x^3 + 4x^2 - x + 18$
D $x^4 - 28x^3 + 7x^2 + 48x - 28$

10 **Uece 2015** Se a expressão algébrica $x^2 + 9$ se escreve identicamente como $a(x + 1)^2 + b(x + 1) + c$ onde *a*, *b* e *c* são números reais, então o valor de $a - b + c$ é

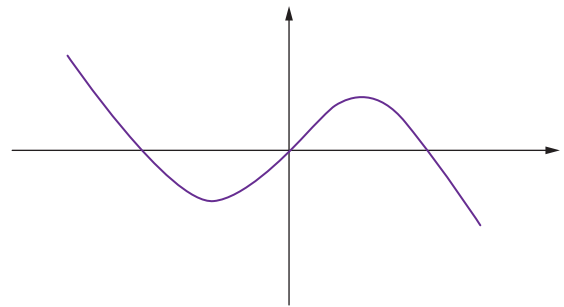
A 9
B 10
C 12
D 13

11 Sendo *a* um número inteiro tal que $P(x) = 2x^3 + ax^2 - 7x + 2a$ e $Q(x) = 2x^2 - x + 4 + a$ sejam polinômios que satisfaçam a identidade $P(x) \equiv (x + a) \cdot Q(x + 1)$, então:

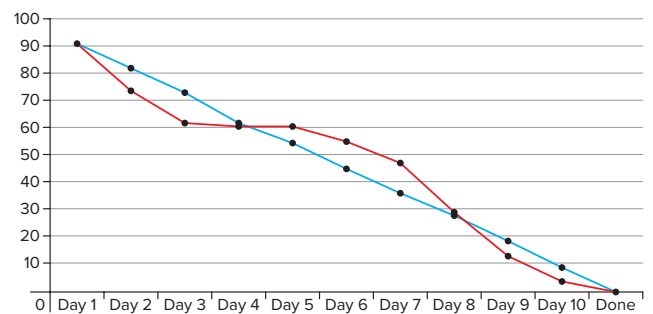
A $a = 3$
B $a = -3$
C $a = 2$
D $a = -2$
E $a = 0$

12 **Unesp** Se *a*, *b* e *c* são números reais tais que $ax^2 + b(x + 1)^2 + c(x + 2)^2 = (x + 3)^2$ para todo *x* real, então o valor de $a \quad b + c$ é:

A –5
B –1
C 7
D 3
E 1

13 **Fuvest** Este gráfico pode ser a representação cartesiana do polinômio:

A $x^2(1 - x)$
B $x(x^2 - 1)$
C $x(1 - x^2)$
D $x^2(x^2 \quad 1)$
E $x^2(1 - x^2)$

14 O gráfico a seguir é exemplo de um modelo conhecido como *Burndown*. Ele relaciona o esforço de trabalho restante em trabalhadores por dia, ao número de dias restantes para concluir uma determinada obra.

https://thiagothamiel.files.wordpress.com/2014/12/sprint-burndown.png

Esse tipo de gráfico sempre apresenta duas funções decrescentes f(x) e g(x) sendo, nesse exemplo, que:

- f(x) é função polinomial de primeiro grau e representa o ideal do planejamento.
- g(x) é função polinomial de grau maior e representa o andamento real da produção.

Assim, o período de produtividade alta, que acontece quando $g(x) > f(x)$, foi

A do dia 2 ao dia 8.
B do dia 2 ao dia 4.
C do dia 5 ao dia 8.
D do dia 5 ao dia 10.
E do dia 2 ao dia 4 e do dia 9 ao dia 10.

15 O *Popclock* calculado a partir da nova Projeção de População do Brasil serve para estimar a população residente do Brasil, ajustada a cada segundo, utilizando as populações projetadas para 1º de julho, cobrindo os anos de 2000 a 2020, extraídas da Projeção de População do Brasil 2013. Elaborada pelo Método das Componentes Demográficas (MCD) para cada uma das 27 unidades da federação, essa estimativa leva em consideração uma população de partida verificada pelo Censo Demográfico de 2000, além das taxas de mortalidade, fecundidade e migração internacional.

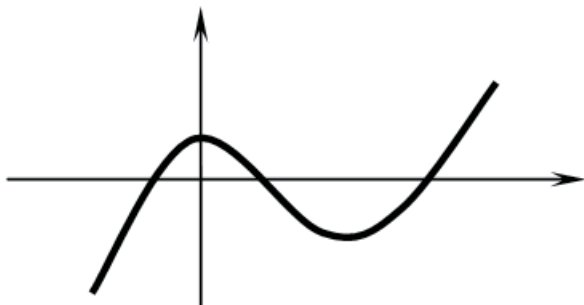
As populações mensais, com data de referência à 00:00 h dos dias 1º de cada mês, foram estimadas mediante um ajuste de uma função polinomial, a partir das populações anuais (em 1º de julho de cada ano) compreendendo o período 2000 - 2020.

Com o objetivo de verificação da aderência do ajuste polinomial aos dados observados, o gráfico a seguir compara os valores ajustados e projetados a partir do cálculo das diferenças relativas e das taxas de crescimento em cada caso:

Fonte: http://www.ibge.gov.br/apps/populacao/projecao/notatecnica.html

Observando-se o número de pontos em que este gráfico intercepta algumas linhas horizontais, pode-se concluir que o polinômio de menor grau possível usado para verificar as diferenças relativas entre as populações projetadas e ajustadas é de:

A 1º grau.
B 2º grau.
C 3º grau.
D 4º grau.
E 5º grau.

16 **FGV-SP** Um polinômio P(x) do terceiro grau tem o gráfico dado a seguir:

Os pontos de intersecção com o eixo das abscissas são (1, 0), (1, 0) e (3, 0).

O ponto de intersecção com o eixo das ordenadas é (0, 2). Portanto, o valor de P(5) é:

A 24
B 26
C 28
D 30
E 32

17 Sabe-se que $P(x) = -x^3 + 7x^2 - 16x + 15$ é um polinômio que admite uma única raiz real. Então esta raiz pertence ao intervalo:

A]0, 1[
B]1, 2[
C]2, 3[
D]3, 4[
E]4, 5[

18 **Uesc** Considere um polinômio P(x) de grau *n*, n > 0 e de coeficientes reais. Considere também dois números reais quaisquer *a* e *b*, que não sejam raízes de P(x), com a < b. O teorema de Bolzano (matemático checo, de origem italiana, 1781-1848) afirma:

1º) Se P(a) e P(b) têm sinais contrários, há um número ímpar de raízes reais entre *a* e *b*.

2º) Se P(a) e P(b) têm o mesmo sinal, há um número par de raízes reais entre *a* e *b*, ou não existem raízes.

Baseado no teorema de Bolzano, os valores reais de *k*, em que o polinômio $P(x) = x^3 - 3x^2 + 4x + (k + 7)$ admita um número par de raízes entre os números 1 e 2, mas de modo que 1 e 2 não sejam raízes, definem o conjunto:

A $\mathbb{R} - [-7, -5]$
B $\mathbb{R} - [-8, -6]$
C $\mathbb{R} - [-11, -9]$
D $\mathbb{R} - [-14, -12]$
E $\mathbb{R} - [-15, -13]$

19 **Uern 2015**

- Divisor: $x^2 + x$;
- Resto: $1 - 7x$; e,
- Quociente: $8x^2 - 8x + 12$.

Logo, o dividendo dessa operação é

A $8x^4 + 4x^2 + 5x + 1$
B $6x^4 + 4x^2 + 4x + 3$
C $8x^4 + 4x^2 + 4x + 1$
D $6x^4 + 8x^2 + 5x + 1$

20 **Unesp** Seja *x* um número real positivo. O volume de um paralelepípedo reto-retângulo é dado, em função de *x*, pelo polinômio $x^3 + 7x^2 + 14x + 8$.

Se uma aresta do paralelepípedo mede x + 1, a área da face perpendicular a essa aresta pode ser expressa por:

A $x^2 - 6x + 8$
B $x^2 + 14x + 8$
C $x^2 + 7x + 8$
D $x^2 - 7x + 8$
E $x^2 + 6x + 8$

21 **Fuvest** O polinômio $P(x) = x^3 + ax^2 + bx$, em que *a* e *b* são números reais, tem restos 2 e 4 quando dividido por $x - 2$ e $x - 1$, respectivamente. Assim, o valor de *a* é:
A –6
B –7
C –8
D –9
E –10

22 Dividindo-se o polinômio P(x) por $x^2 + 1$ obtém-se quociente $x - 7$ e resto $x + 2$. Nessas condições podemos afirmar que o resto da divisão do polinômio P(x) por $x - 10$ é igual a:
A 305
B 310
C 315
D 320
E 325

23 Dividindo $P(x) = x^5 - 3x^3 + 8$ por $D(x) = x - 2$, obtém-se $Q(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ e resto $R(x) = f$, com *a*, *b*, *c*, *d*, *e* e *f* números reais. O valor de $a + b + c + d + + e - f$ é igual a
A 26
B 10
C –6
D –8
E –16

24 **Unesp 2014** O polinômio $P(x) = ax^3 + 2x + b$ é divisível por $x \;\; 2$ e, quando dividido por $x + 3$, deixa resto –45. Nessas condições, os valores de *a* e *b*, respectivamente, são
A 1 e 4.
B 1 e 12.
C –1 e 12.
D 2 e 16.
E 1 e –12.

25 **ESPM 2013** O resto da divisão do polinômio $x^5 - 3x^2 + 1$ pelo polinômio $x^2 - 1$ é:
A $x - 1$
B $x + 2$
C $2x - 1$
D $x + 1$
E $x - 2$

26 **UFSM** Considere os polinômios, de coeficientes reais: $A(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ e $B(x) = bx^3 + 2x^2 + cx + 2$. Teremos que $A(k) = B(k)$, qualquer que seja o número real *k*, quando:
A $a = c = 2$ e $b = 1$.
B $b = c = 1$ e $a = 2$.
C $a = b = c = 1$.
D $a = b = c = 2$.
E nunca.

27 **Fuvest** Um polinômio $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ satisfaz as seguintes condições: $P(1) = 0$; $P(-x) + P(x) = 0$, qualquer que seja *x* real. Qual o valor de P(2)?
A 2
B 3
C 4
D 5
E 6

28 **Mackenzie**

P(x)	x – 2		Q(x)	x – 6
4	Q(x)		1	Q1(x)

Considerando as divisões de polinômios acima, podemos afirmar que o resto da divisão de P(x) por $x^2 - 8x + 12$ é:
A $3x - 2$
B $x + 1$
C $2x + 2$
D $2x + 1$
E $x + 2$

29 **UEPB 2012** Para que o resto da divisão de $2x^4 - 3x^3 + + mx \;\; 2$ por $x^3 \;\; 1$ seja independente de *x*, devemos ter:
A $m = \;\; 2$
B $m = 2$
C $m = 4$
D $m = 0$
E $m = 3$

30 **Ifal 2012** Seja $P(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 5$ um polinômio. O resto da divisão de P(x) pelo binômio $B(x) = x - \frac{1}{2}$ é:
A um número natural.
B um número inteiro negativo.
C um número racional positivo.
D um número racional negativo.
E um número irracional.

31 **UFTM 2011** Dividindo-se o polinômio $p(x) = 3x^4 - 2x^3 + + mx + 1$ por $(x - 1)$ ou por $(x + 1)$, os restos são iguais. Nesse caso, o valor de *m* é igual a
A –2
B –1
C 1
D 2
E 3

32 **Unirio** Dividindo-se um polinômio P(x) por outro D(x) obtém-se quociente e resto $Q(x) = x^3 \;\; 2x \;\; 1$ e $R(x) = 5x + 8$, respectivamente. O valor de P(–1) é:
A –1
B 0
C 2
D 3
E 3

FRENTE 2

33 **Cefet-RJ** Os valores de *a* e *b* que tornam o polinômio $P(x) = x^4 - ax^3 - 8x^2 + 8x + b$ divisível por $x^2 - 1$ são tais que:

A seu produto é 12.
B sua soma é 12.
C seu produto é 50.
D sua soma é 15.
E seu produto é 15.

34 **UFF** Uma fábrica utiliza dois tanques para armazenar combustível. Os níveis de combustível, H_1 e H_2, em cada tanque, são dados pelas expressões: $H_1(t) = 150t^3 - 190t + 30$ e $H_2(t) = 50t^3 + 35t + 30$, sendo *t* o tempo em horas. O nível de combustível de um tanque é igual ao do outro no instante inicial (t = 0) e, também, no instante:

A t = 0,5 h
B t = 1,0 h
C t = 1,5 h
D t = 2,0 h
E t = 2,5 h

35 **UFF** O polinômio $p(x) = x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 8x + 4$ também pode ser escrito sob a forma: $p(x) = (x - 1)^n(x^2 + s)$, $n \in \mathbb{N}$ e $s \in \mathbb{R}$. O valor de n + s é:

A 1
B 4
C 0
D 6
E 2

36 **Uerj** Numa auto estrada verificou-se que a velocidade média do tráfego, V, entre meio-dia e seis horas da tarde, pode ser expressa pela seguinte função:

$$V(t) = at^3 + bt^2 + ct + 40$$

Nesta função, V é medida em quilômetros por hora, t é o número de horas transcorridas após o meio-dia e *a*, *b* e *c* são constantes a serem determinadas. Verificou-se, ainda, que à 1 hora, às 5 horas e às 6 horas da tarde, as velocidades médias eram, respectivamente, 81 km/h, 65 km/h e 76 km/h. O número de vezes, em um determinado dia, em que a velocidade média do tráfego atinge 92 km/h, entre o meio-dia e seis horas da tarde, é exatamente igual a:

A 1
B 2
C 3
D 4

37 **Unesp** Se $x_0 = -2$ é um zero do polinômio $p(x) = x^3 + 5x^2 + kx - 1$, sendo *k* uma constante, então p(x) é divisível por

A $2x^2 + 6x - 1$
B $2x^2 + 6x + 1$
C $x^2 + 3x - 1$
D $x^2 + 3x$
E $x^2 + 1$

38 **Fuvest** Dividindo-se o polinômio P(x) por $2x^2 - 3x + 1$, obtém-se quociente $3x^2 + 1$ e resto $-x + 2$. Nessas condições, o resto da divisão de P(x) por x – 1 é:

A 2
B 1
C 0
D –1
E –2

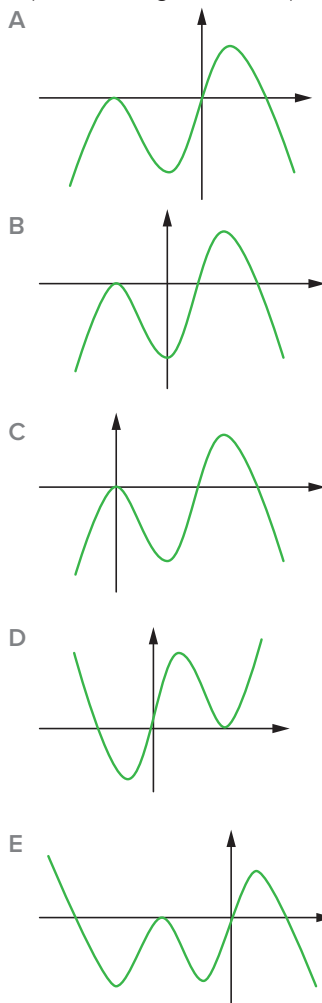
39 Se $P(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2$, qual a alternativa que melhor representa o gráfico de P(1 – x)?

A

B

C

D

E

40 **UEG 2013** A divisão do polinômio $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ por $(x + 1)(x - 2)$ é igual a:

A x – 3
B x + 3
C x – 6
D x + 6

41 **Uern 2012** O valor de *n* para que a divisão do polinômio $P(x) = 2x^3 + 5x^2 + x + 17$ por $d(x) = 2x^2 + nx + 4$ tenha resto igual a 5 é um número

A menor que –6.
B negativo maior que –4.
C positivo menor que 5.
D par e maior que 11.

42 **UEL** O polinômio $p(x) = x^3 + x^2 - 3ax - 4a$ é divisível pelo polinômio $q(x) = x^2 - x - 4$. Qual o valor de *a*?

A $a = -2$
B $a = -1$
C $a = 0$
D $a = 1$
E $a = 2$

43 **Ibmec-RJ** Se o resto da divisão do polinômio $P(x) = x^3 + ax + b$ pelo polinômio $Q(x) = x^2 + x + 2$ é igual a 4, então podemos afirmar que a + b vale:

A 2
B –2
C 3
D –3
E 4

44 Se $-9(x^2 - x + 1) = (x - m)^3 - (x - n)^3$ para todo $x \in \mathbb{R}$, o valor de $(m + n)$ é

A 1.
B 3.
C 5.
D 6.
E 9.

45 Qual deve ser o valor de *k* para que o resto da divisão do polinômio $P(x) = \begin{vmatrix} x & 2 & k \\ 1 & x & x \\ x & -1 & x \end{vmatrix}$ por $Q(x) = \begin{vmatrix} x & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ seja igual a –12?

46 **Unioeste 2019** Se o número real *a* é raiz do polinômio P(x) e o número real *b* é raiz do polinômio Q(x) então é CORRETO afirmar que

A (a + b) é raiz de P(x) + Q(x).
B *a* e *b* são raízes de P(x) + Q(x).
C (a · b) é raiz de P(x) · Q(x).
D *a* e *b* são raízes de P(x) · Q(x).
E (a + b) é raiz de P(x) · Q(x).

47 **Udesc 2019** Seja p(x) um polinômio de grau três tal que p(0) = 6, p(1) = 1, p(2) = 4 e p(3) = 9. É correto afirmar que p(4) é igual a:

A 0
B 16
C 10
D 14
E 8

48 **Ufrgs 2019** A soma dos coeficientes do polinômio $P(x) = (1 - x + x^2 - x^3 + x^4)^{1000}$ é

A 1
B 5
C 100
D 500
E 1000

49 **Uece 2019** Se P(z) é um polinômio do quarto grau na variável complexa z, com coeficientes reais, que satisfaz as seguintes condições: P(i) = P(–i) = P(i + 1) = = P(1 – i) = 0 e P(1) = 1, então P(–1) é igual a

Observação: i é o número complexo cujo quadrado é igual a –1.

A 3
B –3
C 5
D –5

50 **FGV-SP** Sejam Q(x) e R(x) o quociente e o resto da divisão de $5x^3 + (m - 12)x^2 + (m^2 - 2m)x - 2m^2 + p + 9$ por x – 2, respectivamente. Permutando-se os coeficientes de Q(x) obtém-se o polinômio Q'(x) tal que Q'(x) = R(x) para qualquer $x \in \mathbb{R}$ Se *m* e *p* são constantes reais positivas, então, m + p é igual a

A 8
B 7
C 6
D 5
E 4

51 **UPF 2019** O resto da divisão do polinômio $p(x) = x^n + x + 2$ pelo polinômio $q(x) = x - 1$ é

A 2
B 0
C 4
D –1
E –2

52 **Uefs 2018** O resto da divisão de um polinômio do terceiro grau p(x) por (x 3) é igual a 24. Sabendo que as raízes do polinômio p(x) são –3, 1 e 2, o valor de p(0) é

A 12
B 15
C 18
D 21
E 24

53 **UEG 2018** Os restos da divisão do polinômio $p(x) = 2x^4 - \frac{1}{\sqrt{2}}x^3 + 2x^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}x + 1$ pelos polinômios $q(x) = x \quad \sqrt{2}$ e $h(x) = x - \sqrt{8}$ são *r* e *s*, respectivamente. Dessa forma, r + s é

A 0
B 10
C 127
D 137
E 161

54 **UFJF 2018** O resto da divisão do polinômio $p(x) = x^{10} - 1$ pelo polinômio $q(x) = x - 2^{0,2}$ é:

A 0
B 1
C 2
D 3
E 4

55 **Uece 2018** Se o polinômio $p(x) = x^5 + ax^3 + x$ é divisível pelo polinômio $d(x) = x^3 + bx$, onde *a* e *b* são números reais, então, a relação entre *a* e *b* é

A $a^2 - ab + b^2 = 0$
B $b^2 - ab + 1 = 0$
C $a^2 - ab + 1 = 0$
D $b^2 - ab + b = 0$

56 **UPF 2018** Considere o polinômio $P(x) = 4x^3 - x^2 - (5 + m)x + 3$. Sabendo que o resto da divisão de P pelo monômio $x + 2$ é 7, determine o valor de *m*.

A 0
B 15
C 2
D 7
E 21

57 **FGV-SP 2018 (Adapt.)** O polinômio $P(x) = 6x^2 - 5x + k^2$, em que $k \in \mathbb{C}$, tem $3x - 4$ como um de seus fatores. Assim, necessariamente, *k* será um número

A imaginário puro.
B racional não inteiro.
C irracional.
D inteiro.
E positivo.

58 **Mackenzie 2017** Os valores de R, P e A para que a igualdade $\frac{2x^2+5x-1}{x^3-x}=\frac{R}{x}+\frac{P}{x+1}+\frac{A}{x\quad 1}$ seja uma identidade são, respectivamente,

A 3, 1 e –2
B 1, –2 e 3
C 3, –2 e 1
D 1, 3 e –2
E –2, 1 e 3

59 **FICSAE 2017** O resto da divisão de um polinômio do segundo grau P pelo binômio $(x + 1)$ é igual a 3. Dado que $P(0) = 6$ e $P(1) = 5$, o valor de $P(3)$ é

A –7
B –9
C 7
D 9

60 **FGV-SP 2017** O polinômio $P(x) = x^3 - x - 1$ tem uma raiz real *r* tal que:

A $0 < r < 1$
B $1 < r < 2$
C $2 < r < 3$
D $3 < r < 4$
E $4 < r < 5$

61 **Uece 2017** O termo independente de *x* no desenvolvimento da expressão algébrica $(x^2 - 1)^3 \cdot (x^2 + x + 2)^2$ é

A 4
B –4
C 8
D –8

62 **Unicamp 2017** Considere o polinômio $p(x) = x^n + x^m + 1$, em que $n > m \geq 1$. Se o resto da divisão de $p(x)$ por $x + 1$ é igual a 3, então

A n é par e m é par.
B n é ímpar e m é ímpar.
C n é par e m é ímpar.
D n é ímpar e m é par.

63 **Uefs 2017** Considerando-se que o polinômio $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tem 1 como raiz dupla e 3 como raiz simples, é correto afirmar que o resto da divisão de $P(x)$ por $(x + 1)$ é

A –20
B –18
C –16
D –14
E –2

64 **Uece 2017** O resto da divisão do polinômio $D(x) = x^5 - 5x^3 + 4x$ pelo polinômio $d(x) = x^3 - x^2 - 4x + 1$ é o polinômio do segundo grau $r(x)$. A solução real, não nula, da equação $r(x) = 0$ pertence ao intervalo

A [0, 1]
B [2, 3]
C [3, 4]
D [–1, 0]

65 **UFJF 2017** Qual é o polinômio que ao ser multiplicado por $g(x) = 3x^3 + 2x^2 + 5x \quad 4$ tem como resultado o polinômio $h(x) = 3x^6 + 11x^5 + 8x^4 + 9x^3 \quad 17x^2 + 4x$?

A $x^3 + x^2 + x$
B $x^3 + x^2 - x$
C $x^3 + 3x^2 + x$
D $x^3 + 3x^2 + 2x$
E $x^3 + 3x^2 - x$

66 **UEG 2016** Na divisão do polinômio $6x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 10x - 2$ pelo divisor $x^2 + 3x - 2$, o resto multiplicado por 2 é

A $-222x^2 + 252$
B $444x^2 + 252$
C $444x + 252$
D $222x + 252$
E $-444x^2 - 252$

67 **ESPM-SP 2016** O quociente e o resto da divisão do polinômio $x^2 + x - 1$ pelo binômio $x + 3$ são, respectivamente:

A $x - 2$ e 5.
B $x + 2$ e 6.
C $x - 3$ e 2.
D $x + 1$ e 0.
E $x - 1$ e –2.

68 Cefet-MG 2016 Se uma das raízes do polinômio $P(x) = x^4 - 8x^2 + ax + b$ é 2 e $P(1) = 9$, então o valor de $a^5 - 4b$ é

A -64
B -28
C 16
D 24

69 Uece 2016 O resto da divisão de $(x^2 + x + 1)^2$ por $x^2 - x + 1$ é

A $4x$
B $4(x - 1)$
C $4(x - 2)$
D $4(x - 3)$

70 PUC-RS 2016 O polinômio $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx$, em $\mathbb{R}$ é divisível por $(x - 1)$. Podemos afirmar que $p(p(1))$ é

A -1
B 0
C 1
D $a + b + c$
E $-a + b - c$

71 UPF 2015 Se o polinômio $P(x) = x^4 \quad 2x^2 + mx + p$ é divisível por $D(x) = x^2 + 1$, o valor de $m \quad p$ é:

A 3
B 1
C 0
D 2
E 3

72 UFJF 2015 Dado o polinômio $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ com *a*, *b*, *c* e *d* números reais. Qual deve ser a relação entre os números *a*, *b*, *c* e *d* para que o polinômio $p(x)$ seja divisível pelo polinômio $x^2 + 1$?

A $a = -d$; $c = d$
B $a = c$; $b = d$
C $a = -c$; $b = -d$
D $a = d$; $c = -b$
E $a = b = c = d$

73 Cefet-MG 2015 Os polinômios $A(x) = x^2 - 3x + 2$ e $B(x) = x^4 - 2x^3 + kx^2 - 3x - 2$ têm uma única raiz em comum. Os valores possíveis para *k* são números

A pares.
B primos.
C inversos.
D ímpares.
E simétricos.

74 FGV-SP 2015 Se $x^2 - x - 1$ é um dos fatores da fatoração de $mx^3 + nx^2 + 1$, com *m* e *n* inteiros, então, $n + m$ é igual a

A -2
B -1
C 0
D 1
E 2

75 PUC-RS 2015 Se $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, onde *a*, *b*, *c*, *d* são números reais, e sabendo que $p(x)$ é divisível por $x + 1$, podemos afirmar que:

A $a + c > b + d$
B $a + c = b + d$
C $a + c < b + d$
D $a + b + c + d = 0$
E $a + b + c + d = 1$

76 PUC-RJ 2014 Assinale a alternativa correta:

A $x^4 \equiv (x - 2)(x^3 + 2x^2 - 8) + 16$
B $x^4 \equiv (x - 2)(x^3 + 2x^2 + 4x + 8) + 16$
C $x^4 \equiv (x - 2)(x^3 + 2x^2 + 4x + 8) - 16$
D $x^4 \equiv (x - 2)(x^3 - 2x^2 - 4) + 8$
E $x^4 \equiv (x - 2)(-x^3 + 2x^2 - 4) + 8$

77 ESPM-SP 2019 O polinômio $P(x) = a \cdot x^b + b \cdot x^c + c \cdot x^a$ é tal que os números *a*, *b* e *c* são naturais consecutivos, nessa ordem. Sabendo-se que o resto da divisão de $P(x)$ por $(x - 1)$ é igual a 9, podemos afirmar que o resto da divisão de $P(x)$ por $(x + 1)$ é igual a:

A 3
B 1
C 2
D 5
E 4

78 FMP 2016 Seja f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função polinomial definida por $f(x) = x^4 \quad 3x^3 + 3x \quad 9$.
O fato de $x = 3$ ser um zero da função f é equivalente ao fato de o polinômio $x^4 \quad 3x^3 + 3x \quad 9$ ser divisível por

A $x^2 \quad 9$
B $x + 3$
C 3
D $x \quad 3$
E x

79 UFSJ 2012 Dado o polinômio $p(x) = x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 11x - 6$ é CORRETO afirmar que

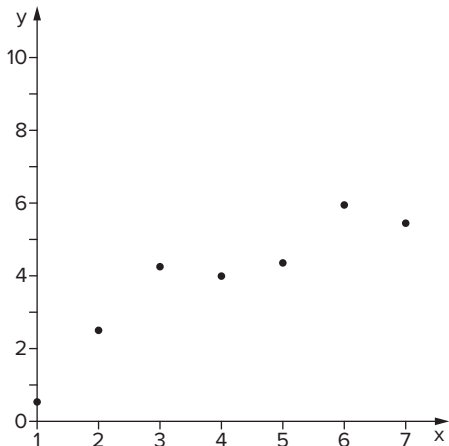
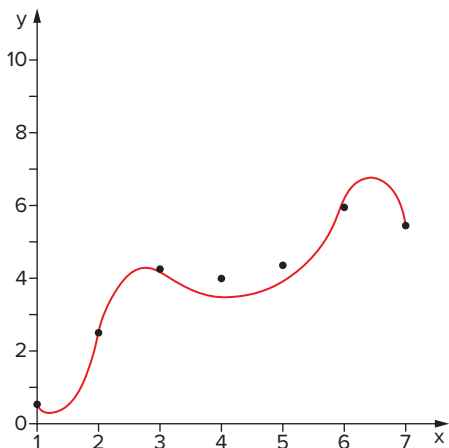
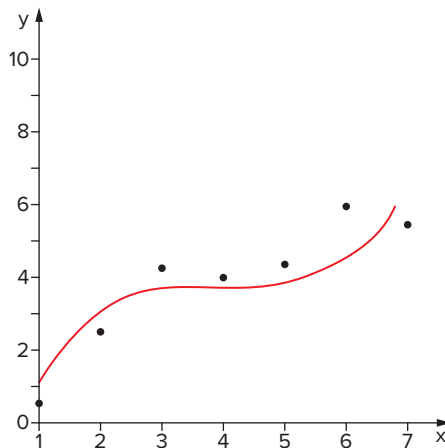
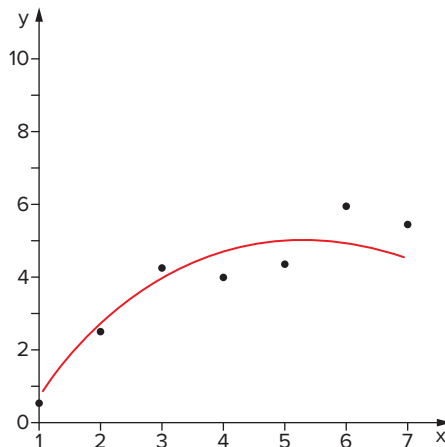
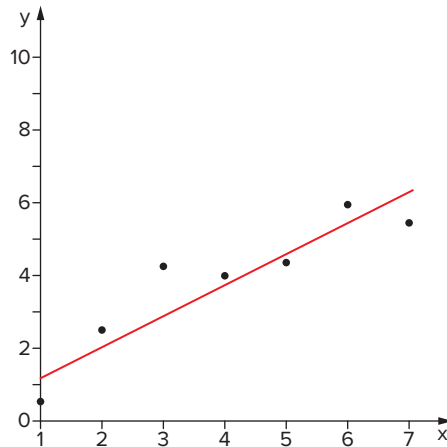
A $p(10)$ é um número de cinco algarismos.
B tem quatro raízes distintas.
C na divisão por $x + 2$ apresenta resto igual a 4.
D é divisível por $x - 1$.

80 ITA 2018 Seja $p(x)$ um polinômio não nulo. Se $x^3 - 3x^2 + 5x - 2$ e $x^3 - 5x^2 + 8x - 4$ são divisores de $p(x)$, determine o menor grau possível de $p(x)$.

Texto complementar

Regressão linear e polinomial

O procedimento denominado regressão polinomial permite que valores de duas grandezas distintas sejam relacionados algebricamente por meio de uma função polinomial cujo grau pode ser escolhido a partir de parâmetros definidos.

Suponha que os dados de um experimento sejam representados por pontos em um sistema cartesiano de coordenadas. Pela distribuição dos momentos é possível observar quais são as melhores opções de modelagem polinomial.

Traçando uma curva entre os pontos, como indicado, obtemos um polinômio de grau elevado que nem sempre é indicado, pois ele pode apresentar oscilações que escapam do intervalo dos dados. Além disso, é bastante comum haver erros significativos no processo de coleta dos dados de polinômios de graus altos.

Pode-se, então, traçar a curva de forma a obter um polinômio de grau menor, nesse caso um polinômio do 3º grau.

E ainda, se for conveniente para a situação apresentada, é possível traçar uma curva de modo que os dados sejam modelados por um polinômio de grau 2.

Até mesmo um polinômio de 1º grau, representado graficamente por uma reta, pode ser suficientemente adequado para a modelagem desses dados. Nesse caso, denominamos o processo de **regressão linear**.

Os valores dos coeficientes do polinômio obtido pela regressão linear ou polinomial são calculados utilizando modelos estatísticos estudados em cursos de ensino superior.

Veja, por exemplo, uma fórmula que permite determinar os coeficientes *a* e *b* de uma função linear do primeiro grau pelo método dos mínimos quadrados:

$$\begin{cases} a = \dfrac{n\left(\sum xy\right)\left(\sum x\right)\left(\sum y\right)}{n\left(\sum x^2\right) \quad \left(\sum x\right)^2} \\ b = \dfrac{\left(\sum y\right)\left(\sum x^2\right) \quad \left(\sum x\right)\left(\sum xy\right)}{n\left(\sum x^2\right) - \left(\sum x\right)^2} \end{cases}$$

Resumindo

Funções polinomiais

$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n$

$f(x) = a_0 \cdot (x - \alpha_1) \cdot (x - \alpha_2) \cdot (x - \alpha_3) \cdot ... \cdot (x - \alpha_n)$, sendo $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n$ as raízes dessa função.

Propriedades

$f(0) = a_n$ é o termo independente da variável *x* do polinômio f(x).

$P(1) = a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_n$ é a soma dos coeficientes do polinômio f(x).

Se $f(\alpha) = 0$, então α é uma das raízes ou um dos zeros de f(x).

Teorema de Bolzano

Se $P(a) \cdot P(b) < 0$, então a equação $P(x) = 0$ admite pelo menos uma raiz real no intervalo $]a, b[$.

Identidade polinomial

$$A(x) \equiv B(x) \Leftrightarrow a_0 = b_0,\ a_1 = b_1,\ a_2 = b_2,\ ...,\ a_n = b_n$$

Teorema de Descartes

$$\begin{array}{l|l} A(x) & B(x) \\ \hline R(x) & Q(x) \end{array} \Rightarrow A(x) \equiv B(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

Teorema do resto

O resto da divisão de um polinômio P(x) por um binômio do tipo $(x - \alpha)$ é igual a $P(\alpha)$.

Teorema de D'Alambert

Um polinômio P(x) é divisível por um binômio $ax + b$ se e somente se $P\left(-\dfrac{b}{a}\right) = 0$.

FRENTE 2

Quer saber mais?

Livro

- **IEZZI, Gelson**. *Fundamentos de Matemática elementar:* complexos/polinômios/equações. 7. ed. v. 6. São Paulo: Atual, 2005.

Site

- "Evariste Galois, o gênio azarado". *Superinteressante*, 196, jan. 2004.
  Disponível em: <http://super.abril.com.br/cultura/evariste-galois-genio-azarado-444320.shtml>.

Vídeo

- Dois amigos conversam sobre uma exposição artística de fractais e sobre funções polinomiais, suas raízes e de como os métodos numéricos para encontrar as raízes de determinados polinômios permitem a produção artística dos fractais.
  Disponível em: <https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1051>.

Exercícios complementares

1 **PUC-SP** A produção diária de certo produto por um determinado operário é avaliada pela expressão $8x + 9x^2 \quad x^3$ unidades, *x* horas após as 8 horas da manhã, quando começa o seu turno. Qual a produção durante a quarta hora de trabalho?

2 **Fuvest** Dados os polinômios $P(x) = x^2$, $Q(x) = x^4 + x^2$ e $R(x) = 5x^4 + 3x^2$, determine os números *a* e *b* reais tais que $R(x) = a \cdot P(x) + b \cdot Q(x)$.

3 **Vunesp** Seja "m" raiz do polinômio real $P(x) = x^6 - (m + 1)x^5 + 32$. Determine o resto da divisão de $P(x)$ por $(x - 1)$.

4 **Fuvest** Determine o valor de *p* para que o polinômio $2x^3 + 5x^2 - px + 2$ seja divisível por $(x - 2)$.

5 **UFRS** Se $r(x) = a \cdot p(x) + b \cdot q(x)$, com $r(x) = 4x^2 + kx - 8$, $p(x) = 2x^2 - 3x - 2$, $q(x) = x^2 - 5x + 1$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{R}$, calcule o valor de $a + b + k$.

6 **Mackenzie** O resto da divisão de $P(x) = x^4 + x^3 + x^2 + ax + b$ por $x^2 + 1$ é 3. Calcule o valor de $(a + b)$.

7 Sendo $P(x)$ um polinômio, sabe-se que $gr[P(x)] \geq 2$ e que $P(\ 2) = \ 5$ e $P(3) = 15$. Se $Q(x)$ é o quociente da divisão de $P(x)$ por $D(x) = (x + 2) \cdot (x \quad 3)$, determine o resto da divisão de $P(x)$ por $D(x)$.

8 **UFRJ** O polinômio $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + d$, $d \in \mathbb{R}$, é divisível por $(x - 2)$.

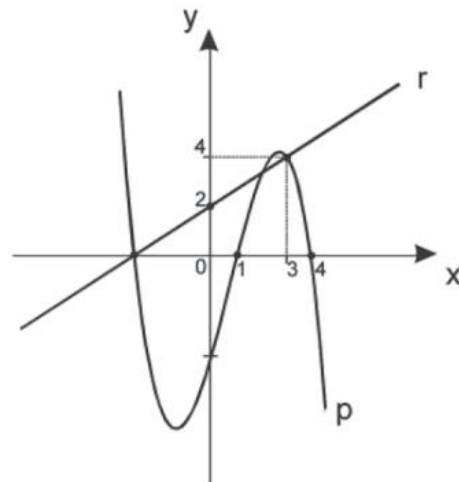
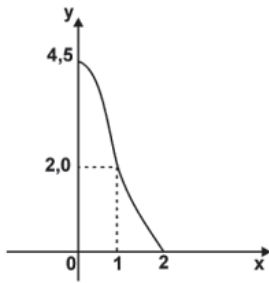
a) Determine d.
b) Calcule as raízes da equação $P(x) = 0$.

9 **UFF** Considere os polinômios $p(x) = 2x^3 + 2x^2 + 7x \quad 1$ e $q(x) = 2x^2 \quad x \quad 1$. Calcule:

a) os valores do número complexo z, tais que $p(z) = q(z)$;
b) o número real *k* e o polinômio do primeiro grau $r(x)$ tais que $p(x) = (x \quad k) \cdot q(x) + r(x)$.

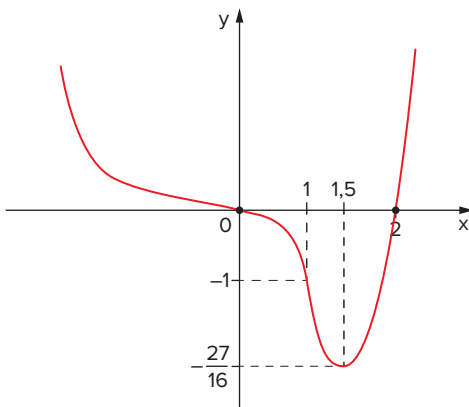
10 **UFF** Determine todos os valores possíveis de $m \in \mathbb{R}$ de modo que o polinômio $P(x) = x^3 + (m - 1)x^2 + (4 - m)x - 4$ tenha três raízes distintas, sendo $x = 1$ a única raiz real.

11 **UFF** Os gráficos da função polinomial p e da reta r estão representados na figura abaixo.

a) Calcule o resto da divisão de $p(x)$ por $x - 3$.
b) Escreva a equação de r.
c) Determine a expressão que define p, sabendo que as três únicas raízes de p são reais.

12 **UFF** Uma parte do esboço do gráfico de uma função polinomial f é dada na figura:

Sabe-se que a função f possui somente três raízes: a raiz $x = 2$ e outras duas que são reais e simétricas. Determine:

a) a expressão polinomial que define f.

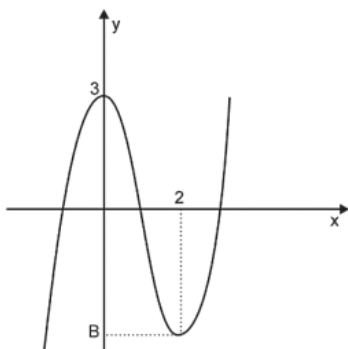
b) o(s) intervalo(s) em que f é positiva.

13 **Unirio** Seja f um polinômio de grau 4, cujo gráfico é dado pela seguinte figura:

Sabendo que zero é raiz tripla de f, determine:

a) A lei que define f.

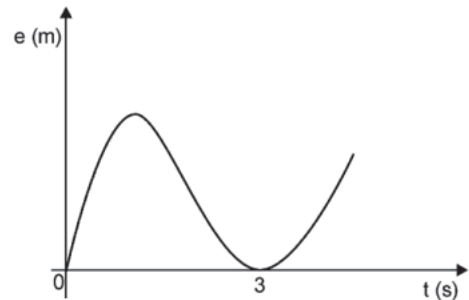
b) Os valores de $x < 1{,}5$ tais que $\;\;1 < f(x) \leq 0$.

14 **UFRJ** Considere o polinômio p dado por $p(x) = x^4 \quad 4x^3 + 6x^2 \quad 4x + 5$. Mostre que $i = \sqrt{-1}$ é uma de suas raízes e calcule as demais raízes.

15 **Uenf** O gráfico abaixo é a representação cartesiana do polinômio $y = x^3 - 3x^2 - x + 3$.

a) Determine o valor de B.

b) Resolva a inequação $x^3 \quad 3x^2 \quad x + 3 > 0$.

16 **Uerj** Um ciclista e um corredor começam, juntos, uma competição.

A curva abaixo, cuja equação é $e = t^3 + at^2 + bt + c$, representa a posição e, em metros, do ciclista, em função do tempo *t*, em segundos, em que *a*, *b* e *c* são números reais fixos.

No instante em que o ciclista parte da posição zero, o corredor inicia um movimento, descrito pela equação $e = 4t$, na mesma pista e no mesmo sentido. Determine a posição mais afastada da origem na qual o ciclista e o corredor voltam a se encontrar.

17 **UFF** Considere o polinômio $p(x) = x^3 - 3x + 2$ e a função real de variável real f definida por $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{p(x)}}$.

Sabe-se que uma das raízes de p(x) é 1. Escreva o domínio de f sob a forma de intervalo.

18 **UFJF 2019** Observe as divisões entre polinômios apresentadas a seguir:

$$\begin{array}{r|l} p(x) & 4x \quad 3 \\ \hline 2 & q_1(x) \end{array} \qquad \cdot \qquad \begin{array}{r|l} (x^3 \quad 2)\ p(x) & 4x \quad 3 \\ \hline r & q_2(x) \end{array}$$

Calcule o resto *r* da segunda divisão.

19 **UFJF 2018** Determine o polinômio P(x) de grau 4 que satisfaz todas as propriedades abaixo:

I. $P(\;\;x) = P(x)$, para todo *x* real.

II. $P(\;\;1) = 3$.

III. O produto de suas raízes é igual a 2.

IV. O resto da divisão de P(x) por $x^3 + 1$ é um polinômio de grau 1.

20 **Unicamp 2017** Sabendo que *a* e *b* são números reais, considere o polinômio cúbico $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$.

a) Mostre que, se r é uma raiz de p(x) então $\dfrac{1}{r}$ é uma raiz do polinômio $q(x) = x^3 + bx^2 + ax + 1$.

b) Determine os valores de *a* e *b* para os quais a sequência $(p(\;\;1), p(0), p(1))$ é uma progressão arit mética (PA), cuja razão é igual a p(2).

21 **UFU 2017** Considere os polinômios $p(x) = x^3 + 2a + b$ e $h(x) = x^4 + a \quad 2b$, em que *a* e *b* são constantes reais e *x* é uma variável real. Determine os valores de *a* e *b* para os quais esses polinômios sejam divisíveis por $x \quad 4$.

FRENTE 2

22 **UFJF 2016** Sabendo que o polinômio $p(x) = ax^3 + bx + 2$ é divisível por $(x + 1)^2$, determine *a* e *b*.

23 **Unicamp 2015** Seja (a, b, c, d) uma progressão geométrica (PG) de números reais, com razão $q \neq 0$ e $a \neq 0$.

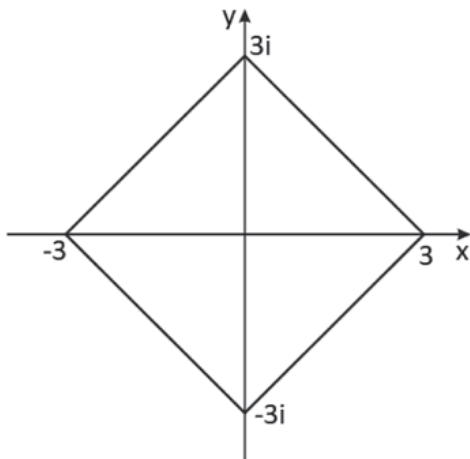
a) Mostre que $x = -\frac{1}{q}$ é uma raiz do polinômio cúbico $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$.

b) Sejam *e* e *f* números reais quaisquer e considere o sistema linear nas variáveis x e y, $\begin{pmatrix} a & c \\ d & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$.

Determine para que valores da razão q esse sistema tem resolução única.

24 **UFPE 2013** Determine o polinômio com coeficientes reais $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx$, tal que $p(x + 1) - p(x) = 6x^2$ e indique $a^2 + b^2 + c^2$.

25 **UFPE 2011** Sabendo que $\frac{x^2 - 2x + 4}{x^3 + x^2 - 2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-1}$, assinale A + B + 2C.

26 **FGV-SP** Os vértices do quadrado na figura a seguir representam, no plano de Argand – Gauss (plano complexo), todas as raízes de um polinômio p(x) cujo coeficiente do termo de maior grau é 1.

a) Determine a expressão do polinômio p(x).

b) Calcule o resto da divisão de p(x) pelo polinômio $q(x) = x^3 \quad 2x^2 + 4x \quad 8$.

27 **Insper 2016** Considere um polinômio P(x) do 4º grau, de coeficientes reais, tal que:

- $P(-3) = P(1) = P(5) = 0$
- P(0) e P(2) são, ambos, números positivos.

Nessas condições, os sinais dos números P(–5), P(4) e P(6) são, respectivamente,

A positivo, negativo e negativo.
B positivo, negativo e positivo.
C negativo, negativo e negativo.
D negativo, positivo e negativo.
E negativo, positivo e positivo.

28 **FGV-SP 2016** Sabendo-se que o resto da divisão do polinômio $P(x) = x^3 - x^2 + 2^k + 2$ por $x - 3$ é igual a $4^k - 220$, o valor de *k* é

A –4
B –2
C 2
D 3
E 4

29 **IFSC 2014** Dado o polinômio $-6 + 11x - 6x^2 + x^3$ é **CORRETO** afirmar que:

A Trata-se de um polinômio de grau 6.
B A fatoração do polinômio é $(x - 1)(x - 2)(x - 3)$.
C Se dividirmos o polinômio por $x - 3$ o polinômio quociente é $x^2 - 2x + 3$.
D O grau do polinômio é 11.
E Podemos dividir o polinômio por $x^5 - 6x^2 + 11x - 6$ e obteremos como resposta o monômio x^2.

30 **Cefet-MG 2013** Perdeu-se parte da informação que constava em uma resolução de um problema, pois o papel foi rasgado e faz-se necessário encontrar três dos números perdidos que chamaremos de A, B e C na equação abaixo.

$$\frac{Ax - 2}{x^2 + x + 3} + \frac{B}{2x \quad 1} = \frac{Cx^2 - 9x - C}{2x^3 + x^2 + 5x - 3}$$

O valor de A + B + C é

A –3
B –2
C 4
D 5
E 7

31 **Esc. Naval 2013** Sejam $F(x) = x^3 + ax + b$ e $G(x) = 2x^2 + + 2x \quad 6$ dois polinômios na variável real *x*, com *a* e *b* números reais. Qual valor de (a + b) para que a divisão $\frac{F(x)}{G(x)}$ seja exata?

A –2
B –1
C 0
D 1
E 2

32 **Udesc 2012** Seja r(x) o resto da divisão do polinômio $p(x) = 4x^2 + 3x + 5$ por $q(x) = 2x^2 - x - 1$. Se $f(x) = 2x + k$ e $f(g(x)) = r(x)$, então o valor da constante *k* para que o conjunto solução da inequação $g(x) \geq 10$ seja $\{x \in \mathbb{R} | x \geq 3\}$ é:

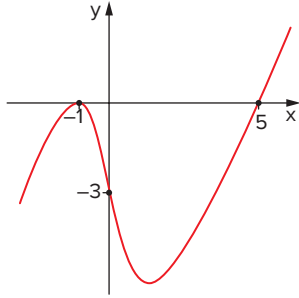
A –12
B –2
C 12
D 2
E $-\frac{32}{5}$

33 **Ufpr** Determine **m** e **n** de modo que o resto da divisão do polinômio $y^5 - my^3 + n$ por $y^3 + 3y^2$ seja 5.

A m = +9; n = –5
B m = +9; n = +5
C m = –4; n = –5
D m = +4; n = +5
E m = –9; n = –5

34 **Udesc 2012** Sejam q(x) e r(x) respectivamente, o quociente e o resto da divisão de $f(x) = 6x^4 \quad x^3 \quad 9x^2 \quad 3x + 7$ por $g(x) = 2x^2 + x + 1$. O produto entre todas as raízes de q(x) e r(x) é igual a:

A $\frac{7}{3}$
B 3
C $\frac{3}{5}$
D 5
E $\frac{5}{3}$

35 A figura representa o trecho do gráfico do polinômio de coeficientes reais P(x) onde ocorrem todas as suas interseções com os eixos coordenados.

Assinale a alternativa que apresenta o conjunto solução da inequação $P(x) \cdot P(x + 2) < 0$.

A $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 5\}$
B $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -1\}$
C $\{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < 5\}$
D $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 5\}$
E $\{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < -1 \text{ ou } 3 < x < 5\}$

36 **FGV-SP** Um polinômio P(x) do 4º grau é divisível por $(x - 3)^3$. Sendo $P(0) = 27$ e $P(2) = -1$, então o valor de P(5) é:

A 48 C 27 E 12
B 32 D 16

37 **Ifal 2011** Dividindo o polinômio p(x) pelo polinômio $(x - 2)(x - 4)(x - 5)$ obtém-se resto $x + 3$. Se os restos das divisões de p(x) por $x - 2$, $x - 4$ e $x - 5$ são, respectivamente, os números A, B e C, então ABC vale

A 100 C 200 E 360
B 180 D 280

38 Quais devem ser os valores de *a* e *b*, a, b $\in \mathbb{R}$, para que o polinômio $P(x) = x^3 - 4x^2 - 5ax + 6b$ seja divisível pelo polinômio $Q(x) = x^2 + 2x - 3$?

39 **UCPel 2011** Na divisão do polinômio $P(x) = 4x^3 + mx^2 \quad 3x + 4$ por $x \quad 2$ o resto é 18. Nessas condições, o valor de *m* é

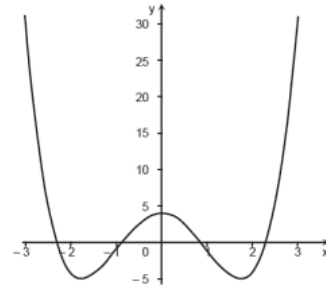
A –6 B 3 C –3 D 6 E –5

40 **UPE 2011** Para que o polinômio $6x^3 - 4x^2 + 2mx - (m + 1)$ seja divisível por $x - 3$, o valor da raiz quadrada do módulo de *m* deve ser igual a

A 0 C 2 E 5
B 1 D 3

41 **UTFPR** Quais são os polinômios que representam o quociente q(x) e o resto r(x) da divisão do polinômio $p(x) = x^3 + 5x^2 + 6$ pelo polinômio $d(x) = x^2 - 3$?

A $q(x) = -(x + 5)$ e $r(x) = 3x + 21$.
B $q(x) = x + 5$ e $r(x) = -(3x + 21)$.
C $q(x) = x - 5$ e $r(x) = -3x + 21$.
D $q(x) = -(x + 5)$ e $r(x) = 3x - 21$.
E $q(x) = x + 5$ e $r(x) = 3x + 21$.

42 **UFPE** Seja p(x) um polinômio com coeficientes reais, com coeficiente líder 1, de grau 4, satisfazendo: $p(x) = p(-x)$ para todo *x* real, $p(0) = 4$ e $p(1) = -1$. Parte do gráfico de p(x) está esboçado a seguir.

Analise as afirmações a seguir, acerca de p(x).

☐ $p(x) = x^4 + 6x^2 + 4$.
☐ As raízes de p(x) são $\pm\sqrt{3 \pm \sqrt{5}}$, para qualquer escolha dos sinais positivos e negativos.
☐ As raízes de p(x) são $\dfrac{\pm\sqrt{10} \pm \sqrt{2}}{2}$ para qualquer escolha dos sinais positivos e negativos.
☐ $p(x) = (x^2 - 3)^2 + 5$.
☐ O valor mínimo de p(x) ocorre em $x = \pm\sqrt{3}$.

43 O resto da divisão de $P(x) = 2x^3 + 2kx + 8t$ por $D(x) = x^2 - x + 3$ é igual a 10, então podemos afirmar que k^t vale:

A 2 C 4 E 16
B –2 D –4

44 **Unemat** Seja Q(x) o quociente da divisão do polinômio $P(x) = x^4 - 1$ pelo polinômio $D(x) = x - 1$, é correto afirmar.

A $Q(0) = 0$ C $Q(1) = 0$ E $Q(1) = 2$
B $Q(0) < 0$ D $Q(-1) = 0$

45 **Uece** Se $Q_1(x)$ é o quociente da divisão de $x^2 + 2$ por $x + 1$ e $Q_2(x)$ é o quociente da divisão de $x^2 + 2$ por $x - 1$, então $Q_1(3) + Q_2(4)$ é igual:

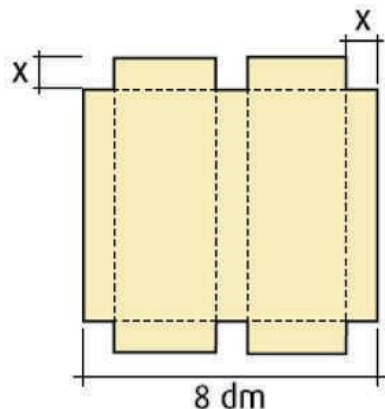
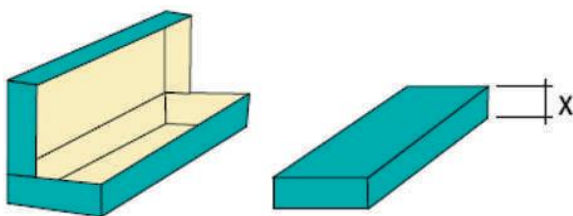
A 7 B 8 C 9 D 10

46 **Uerj** Considere o polinômio $P(n) = (n + 1)(n^2 + 3n + 2)$, $n \in \mathbb{N}$. Calcule:

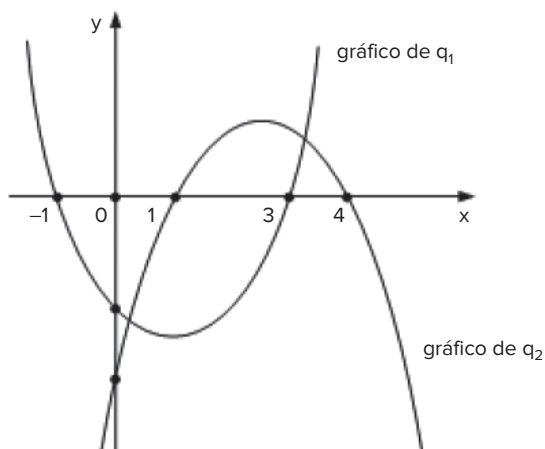
a) a quantidade de paralelepípedos retângulos de bases quadradas e volumes numericamente iguais a P(11), cujas medidas das arestas são expressas por números naturais.
b) o valor da expressão: $\dfrac{(7^9 + 4 \cdot 7^6 + 5 \cdot 7^3 + 2)}{344^2}$.

47 **Unicamp** Seja $p(x) = x^3 - 12x + 16$.

a) Verifique que $x = 2$ é raiz de p(x).
b) Use fatoração para mostrar que se $x > 0$ e $x \neq 2$, então $p(x) > 0$.
c) Mostre que, entre todos os prismas retos de bases quadradas que têm volume igual a 8 m³, o cubo é o que tem menor área total.

48 **Uerj** Para fazer uma caixa, foi utilizado um quadrado de papelão de espessura desprezível e 8 dm de lado, do qual foram recortados e retirados seis quadrados menores de lado x.
Observe a ilustração.

Em seguida, o papelão foi dobrado nas linhas pontilhadas, assumindo a forma de um paralelepípedo retângulo, de altura x, como mostram os esquemas.

Quando x = 2 dm, o volume da caixa é igual a 8 dm^3.
Determine outro valor de x para que a caixa tenha volume igual a 8 dm^3.

49 **UFSC** Um polinômio p(x) de grau n > 2, dividido por x – 3, dá resto 5, e dividido por x + 1, dá resto 2. Então, qual é o resto da divisão de p(x) por (x – 3)(x + 1)?

50 **Unifesp** Considere as funções quadráticas $q_1(x)$ e $q_2(x)$ cujos gráficos são exibidos na figura e faça o esboço de um possível gráfico da função produto $q(x) = q_1(x) \cdot q_2(x)$.

51 Sabe-se que a energia cinética **E** de um corpo, em Joules, sua massa **m**, em quilogramas, e sua velocidade **v**, em metros por segundo, obedecem à relação $E = \frac{m \cdot v^2}{2}$.
Um determinado corpo é arremessado para o ar e sofre deterioração perdendo massa enquanto está em movimento de tal forma que sua energia cinética, em Joules, seja expressa pelo polinômio $E(t) = -12{,}5t^3 + 225t^2 - 1200t + 2000$ com t em segundos a partir do momento do arremesso.
Determine a expressão m(t) que fornece a massa em kg do corpo em função do tempo em segundos, sabendo que a velocidade desse corpo, em m/s, é dada por v(t) = 20   5t.

52 **FGV-SP** Determine os valores de A, B e C de modo que:

$$\frac{3x^2+6x+2}{x^3+3x^2+2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2}$$

53 **AFA 2016** Considere os polinômios $Q(x) = x^2 \quad 2x + 1$ e $P(x) = x^3 - 3x^2 - ax + b$, sendo a e b números reais tais que $a^2 - b^2 = -8$.
Se os gráficos de Q(x) e P(x) têm um ponto comum que pertence ao eixo das abscissas, então é **INCORRETO** afirmar sobre as raízes de P(x) que
A podem formar uma progressão aritmética.
B são todas números naturais.
C duas são os números a e b.
D duas são números simétricos.

54 **AFA 2015** Considere o polinômio $p(x) = ax^4 + bx^3 + 2x^2 + 1$, $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$ e marque a alternativa FALSA.
A x = 0 não é raiz do polinômio p(x).
B Existem valores distintos para a e b tais que x = 1 ou x = –1 são raízes de p(x).
C Se a = 0 e b = 3, o resto da divisão de p(x) por $3x^2 - x + 1$ é zero.
D Se a = b = 0 tem-se que $x = -\frac{1}{2}i$ é uma raiz de p(x), considerando que $i^2 = -1$.

55 **Unicamp 2016** Considere o polinômio cúbico $p(x) = x^3 + x^2 - ax - 3$, onde a é um número real. Sabendo que *r* e *–r* são raízes reais de p(x), podemos afirmar que p(1) é igual a
A 3
B 1
C –2
D –4

56 **AFA** Sobre o polinômio A(x) expresso pelo determinante da matriz $\begin{bmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & -2 \\ 1 & x & x \end{bmatrix}$ é incorreto afirmar que
A não possui raízes comuns com $B(x) = x^2 - 1$.
B não possui raízes imaginárias.
C a soma de suas raízes é igual a uma de suas raízes.
D é divisível por P(x) = x + 2.

57 **EEAR** A inequação $(x^2 - 5x + 6)(x - 3) \geq 0$ tem para conjunto resolução:

A $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 3\}$
B $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$
C $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 3\}$
D $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2 \text{ ou } x \geq 3\}$

58 **ITA 2017** Considere o polinômio

$$p(x) = x^4 - (1+2\sqrt{3})x^3 + (3+2\sqrt{3})x^2 - (1+4\sqrt{3})x + 2.$$

a) Determine os números reais **a** e **b** tais que $p(x) = (x^2 + ax + 1)(x^2 + bx + 2)$.
b) Determine as raízes de $p(x)$.

59 **ITA 2015** Seja S o conjunto de todos os polinômios de grau 4 que têm três dos seus coeficientes iguais a 2 e os outros dois iguais a 1.

a) Determine o número de elementos de S.
b) Determine o subconjunto de S formado pelos polinômios que têm –1 como uma de suas raízes.

60 **ITA** Considere o polinômio $p(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 - a_1$, em que uma das raízes é $x = -1$. Sabendo-se que a_1, a_2, a_3, a_4 e a_5 são reais e formam, nesta ordem, uma progressão aritmética com $a_4 = \frac{1}{2}$, então $p(-2)$ é igual a

A –25
B –27
C –36
D –39
E –40

61 **ITA** Um polinômio P é dado pelo produto de 5 polinômios cujos graus formam uma progressão geométrica. Se o polinômio de menor grau tem grau igual a 2 e o grau de P é 62, então o de maior grau tem grau igual a

A 30
B 32
C 34
D 36
E 38

62 **ITA** Sendo c um número real a ser determinado, decomponha o polinômio $9x^2 - 63x + c$, numa diferença de dois cubos $(x + a)^3 - (x + b)^3$.
Neste caso, $|a| + |b| - |c|$ é igual a

A 104
B 114
C 124
D 134
E 144

63 **ITA** No desenvolvimento de $(ax^2 - 2bx + c + 1)^5$ obtém-se um polinômio $p(x)$ cujos coeficientes somam 32. Se 0 e –1 são raízes de $p(x)$, então a soma $a + b + c$ é igual a:

A $-\frac{1}{2}$
B $-\frac{1}{4}$
C $\frac{1}{2}$
D 1.
E $\frac{3}{2}$

64 **ITA** A identidade $\frac{x^3+4}{x^3+1} = 1 + \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^3-x+1}$ é válida para todo número real $x \neq -1$. Determine $a + b + c$.

65 **IME 2020** Um polinômio $P(x)$ de grau maior que 3 quando dividido por $x - 2$, $x - 3$ e $x - 5$ deixa restos 2, 3 e 5, respectivamente. O resto da divisão de $P(x)$ por $(x - 2)(x - 3)(x - 5)$ é:

A 1
B x
C 30
D $x - 1$
E $x - 30$

66 **IME 2018** Seja $P(x)$ o polinômio de menor grau que passa pelos pontos $A(2, -4+3\sqrt{3})$, $B(1, 3\sqrt{2}-2)$, $C(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ e $D(\sqrt{3}, \sqrt{2})$. O resto da divisão de $P(x)$ por $(x - 3)$ é:

A $8\sqrt{3} \quad 5\sqrt{2} \quad 6$
B $6\sqrt{3} - 4\sqrt{2} - 1$
C $9\sqrt{3} - 8\sqrt{2} - 2$
D $4\sqrt{3} - 10\sqrt{2} - 3$
E $4\sqrt{3} - \sqrt{2} - 6$

67 **IME 2016** Seja $P(x) = x^2 + ax + b$. Sabe-se que $P(x)$ e $P(P(P(x)))$ têm uma raiz em comum. Pode-se afirmar que para todo valor a e b

A $P(-1)P(1) < 0$
B $P(-1)P(1) = 0$
C $P(-1) + P(1) = 2$
D $P(0)P(1) = 0$
E $P(0) + P(1) = 0$

68 **IME 2015** Os coeficientes $a_0, \ldots, a_{2014}$ do polinômio $P(x) = x^{2015} + a_{2014}x^{2014} + \ldots + a_1x + a_0$ são tais que $a_i \in \{0, 1\}$, para $0 \leq i \leq 2014$.

a) Quais são as possíveis raízes inteiras de $P(x)$?
b) Quantos polinômios da forma acima têm duas raízes inteiras distintas?

69 **IME 2015** Qual o resto da divisão do polinômio $x^{26} - x^{25} - 6x^{24} + 5x^4 - 16x^3 + 3x^2$ pelo polinômio $x^3 - 3x^2 - x + 3$?

A $x^2 + x - 2$
B $6x^2 - 4x + 3$
C $3x - 9$
D $6x^2 - 17x - 3$
E $6x + 1$

70 **IME 2017** O polinômio $P(x) = x^3 - bx^2 + 80x - c$ possui três raízes inteiras positivas distintas. Sabe-se que duas das raízes de polinômio são divisoras de 80 e que o produto dos divisores positivos de c menores do que c é c^2. Qual é o valor de b?

A 11
B 13
C 17
D 23
E 29

71 **IME** Encontre o polinômio P(x) tal que $Q(x) + 1 = (x - 1)^3 \cdot P(x)$ e $Q(x) + 2$ é divisível por x^4, onde Q(x) é um polinômio do 6º grau.

72 **ITA 2018** Se x é um número real que satisfaz $x^3 = x + 2$, então x^{10} é igual a

A $5x^2 + 7x + 9$

B $3x^2 + 6x + 8$

C $13x^2 + 16x + 12$

D $7x^2 + 5x + 9$

E $9x^2 + 3x + 10$

73 **FGV-SP** Dividindo-se o polinômio $P(x) = x^n - 1$ por $x - 1$, obtém-se:

A resto igual a –1.

B resto igual –2.

C quociente $Q(x) = x^{n-1} + x^{n-2} + ... + x + 1$.

D quociente $Q(x) = x^{n-1} - x^{n-2} + ... - x + 1$.

E quociente $Q(x) = x^{n-1} + 1$.

74 **ITA 2016** Considere o polinômio p com coeficientes complexos definido por:

$$p(z) = z^4 + (2 + i)z^3 + (2 + i)z^2 + (2 + i)z + (1 + i)$$

Podemos afirmar que

A nenhuma das raízes de p é real.

B não existem raízes de p que sejam complexas conjugadas.

C a soma dos módulos de todas as raízes de p é igual a $2 + \sqrt{2}$.

D o produto dos módulos de todas as raízes de p é igual a $\sqrt{2}$.

E o módulo de uma das raízes de p é igual a $\sqrt{2}$.

75 **ITA 2016** Determine o termo constante do resto da divisão do polinômio $(1 + x + x^2)^{40}$ por $(1 + x)^3$.

76 **ITA 2015** Considere o polinômio p dado por $p(x) = 2x^3 + ax^2 + bx \quad 16$, com $a, b \in \mathbb{R}$. Sabendo se que p admite raiz dupla e que 2 é uma raiz de p, então o valor de $b \quad a$ é igual a

A 36

B 12

C 6

D 12

E 24

77 **ITA 2015** Seja p o polinômio dado por $p(x) = \sum_{j=0}^{15} a_j x^j$, $a_j \in \mathbb{R}$, $j = 0, 1, ..., 15$, e $a_{15} \neq 0$. Sabendo-se que i é uma raiz de p e $p(2) = 1$, então o resto da divisão de p pelo polinômio q, dado $q(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$, é igual a

A $\frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{5}$.

B $\frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{5}$.

C $\frac{2}{5}x^2 + \frac{2}{5}$.

D $\frac{3}{5}x^2 - \frac{3}{5}$.

E $\frac{3}{5}x^2 + \frac{1}{5}$.

78 **ITA** Um polinômio real $p(x) = \sum_{n=0}^{5} a_n x^n$, com $a_5 = 4$, três raízes reais distintas, a, b e c, que satisfazem o sistema $\begin{cases} a + 2b + 5c = 0 \\ a + 4b + 2c = 6 \\ 2a + 2b + 2c = 5 \end{cases}$.

Sabendo que a maior das raízes é simples e as demais têm multiplicidade dois, pode-se afirmar que p(1) é igual a

A –4

B –2

C 2

D 4

E 6

79 **ITA** Considere o polinômio $p(x) = \sum_{n=0}^{15} a_n x^n$ com coeficientes $a_0 = -1$ e $a_n = 1 + i \cdot a_{n-1}$, $n = 1, 2, ..., 15$.

Das afirmações:

I. $p(-1) \in \mathbb{R}$

II. $|p(x)| \leq 4(3 + \sqrt{2} + \sqrt{5}),\ \forall x \in [-1, 1]$

III. $a_8 = a_4$

é(são) verdadeira(s) apenas

A I.

B II.

C III.

D I e II.

E II e III.

80 **ITA** O polinômio de grau 4

$$(a + 2b + c)x^4 + (a + b + c)x^3 - (a - b)x^2 + (2a - b + c)x + 2(a + c),$$

com $a, b, c \in \mathbb{R}$, é uma função par. Então, a soma dos módulos de suas raízes é igual a

A $3 + \sqrt{3}$

B $2 + 3\sqrt{3}$

C $2 + \sqrt{2}$

D $1 + 2\sqrt{2}$

E $2 + 2\sqrt{2}$

antos777/Shutterstock.co

Nejron Photo/Shutterstock.com

Mark Nazh/Shutterstock.com

FRENTE 2

CAPÍTULO

10

Equações polinomiais

O desenvolvimento da linguagem algébrica permite a codificação de problemas que possuem números como soluções, impulsionando a criatividade no uso das técnicas usadas para se obter a solução. A Álgebra se estabelece como manifestação do pensamento matemático de forma valiosa para atividades cotidianas como, por exemplo, o uso do computador e do celular. Imagine o quanto os conceitos matemáticos precisaram ser estudados e desenvolvidos para que cada peça de tecnologia a sua volta pudesse vir a existir!

Equações de uma variável

Equações são sentenças matemáticas abertas que traduzem um problema. Pode se escrever uma equação partindo de uma sentença matemática fechada expressa por relação de igualdade e omitindo um dos seus valores numéricos.

O valor omitido é chamado de **incógnita** da equação. O valor da incógnita costuma ser representado por uma letra, sendo bastante comum o uso das letras x e y.

Veja o exemplo de uma sentença fechada:

$$(12 - 15)^2 + 11 = 20$$

Verifica-se que a sentença é verdadeira, pois efetuando as operações indicadas no 1º membro, chega-se de fato ao valor apresentado no 2º membro da igualdade. Observe:

- A diferença apresentada entre os parênteses é: $12 - 15 = -3$;
- O quadrado dessa diferença: $(-3)^2 = 9$;
- Efetuando-se a adição, obtemos: $9 + 11 = 20$.
  De fato $20 = 20$.

Agora, considere que um dos valores numéricos do 1º membro da sentença seja desconhecido. Podemos usar a letra x para representar esse número.

$$(x - 15)^2 + 11 = 20$$

Essa equação pode ser trazida pela seguinte questão:

"De qual número se deve subtrair 15 unidades, para se obter um resultado que, depois de elevado ao quadrado e adicionado ao número 11, totalize 20 unidades?"

Embora se tenha omitido o número 12 na sentença fechada original, ele não é a única resposta da pergunta. O número 18 também é uma resposta possível. Veja:

Se dele forem subtraídas 15 unidades, obtém-se um resultado que, depois elevando ao quadrado e adicionado ao número 11, totaliza 20 unidades.	$18 - 15 = 3$ $3^2 = 9$ $9 + 11 = 20$

Solução de uma equação

Os números que são respostas de uma equação também são chamados de **soluções** da equação. As soluções de uma equação costumam ser apresentadas como elementos de um conjunto numérico denominado: conjunto solução da equação.

Como no item anterior, vimos que os números 12 e 18 são as únicas respostas corretas da equação $(x \quad 15)^2 + 11 = 20$. Por isso, o conjunto solução S dessa equação é $S = \{12, 18\}$.

O conjunto solução de uma equação deve possuir todas as soluções dessa equação e nenhum elemento a mais.

Escrever o conjunto solução de uma equação na incógnita *x* indica que $x \in S$, ou seja, "x" é um elemento que pode, nesse caso, assumir mais de um valor numérico. Por esse motivo, a incógnita de uma equação também costuma ser chamada de **variável**.

Equações com uma variável

Há diferentes tipos de equações matemáticas que podem ser classificadas de acordo com o número de variáveis e as operações ou funções que a exprimem.

A tabela a seguir mostra alguns tipos de equações com apenas uma variável, que são estudadas no Ensino Médio:

Equação polinomial do 1º grau	$2x + 15 = 13$
Equação polinomial do 2º grau	$2x^2 + 3 = 7x$
Equação modular	$\|2x + 3\| = x + 3$
Equação exponencial	$10^x = 20$
Equação trigonométrica	$\cos(x) = -1$
Equação polinomial do 3º grau	$x^3 + x = x^2 + 1$
Equação polinomial do 4º grau	$x^4 = 16$
Equação polinomial do 5º grau	$x^5 = -9x^3$

O conjunto solução de uma equação, dependendo do conjunto universo em que sua variável está definida, pode ser:

Naturais	$x \in \mathbb{N}$
Inteiros	$x \in \mathbb{Z}$
Reais positivos	$x \in \mathbb{R}_+$
Reais	$x \in \mathbb{R}$
Complexos	$x \in \mathbb{C}$

O conjunto numérico em que a variável de uma equação está definida é chamado de **domínio**. A solução de uma equação numérica deve pertencer ao domínio da equação. Considere, por exemplo, a equação $2x + 15 = 13$. Se o domínio dessa equação é $D = \mathbb{N}$, essa equação não possui solução, pois $x = -1$. Caso o domínio seja o conjunto dos números inteiros ($\mathbb{Z}$), a solução dessa equação é $S = \{-1\}$.

Note que:

$$2x + 15 = 13, \text{ com } x \in \mathbb{N}, \text{ temos que } S = \varnothing;$$

$$2x + 15 = 13, \text{ com } x \in \mathbb{Z}, \text{ temos que } S = \{-1\}.$$

Considerando a tabela das equações, veja algumas possibilidades para o conjunto solução das equações dadas.

- **Equação modular:** $|2x + 3| = x + 3$
  Considerando $x \in \mathbb{N}$, o conjunto solução dessa equação é $S = \{0\}$; caso tenhamos $x \in \mathbb{Z}$, o conjunto solução é $S = \{0, -2\}$.
- **Equação exponencial:** $10^x = 20$
  Considerando $x \in \mathbb{Q}$, o conjunto solução dessa equação é $S = \varnothing$; caso tenhamos $x \in \mathbb{R}$, o conjunto solução é $S = \{1 + \log 2\}$.
- **Equação trigonométrica:** $\cos x = -1$
  Considerando $x \in [0, 2\pi]$, o conjunto solução dessa equação é $S = \{\pi\}$; caso tenhamos $x \in \mathbb{R}$, o conjunto solução é $S = \{\pi + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

- **Equação do 3º grau:** $x^3 + x = x^2 + 1$
  Considerando $x \in \mathbb{R}$, o conjunto solução dessa equação é $S = \{1\}$; caso tenhamos $x \in \mathbb{C}$, o conjunto solução é $S = \{1, i, \quad i\}$.
- **Equação do 4º grau:** $x^4 = 16$
  Considerando $x \in \mathbb{N}$, o conjunto solução dessa equa ção é $S = \{2\}$; caso tenhamos $x \in \mathbb{R}$, o conjunto solução é $S = \{2, \quad 2\}$. E, ainda, se $x \in \mathbb{C}$, temos $S = \{2, \quad 2, 2i, \quad 2i\}$.
- **Equação do 5º grau:** $x^5 + 9x^3 = 0$
  Considerando $x \in \mathbb{R}$, o conjunto solução dessa equação é $S = \{0\}$; caso tenhamos $x \in \mathbb{C}$, o conjunto solução é $S = \{0, 3i, -3i\}$.

Equações polinomiais de uma variável

Quando dois polinômios não idênticos A(x) e B(x) são comparados por uma relação de igualdade, a sentença matemática aberta obtida é chamada de **equação algébrica** ou **equação polinomial**.

$$A(x) = B(x)$$

Equações algébricas são equivalentes quando possuem o mesmo conjunto solução. O símbolo $\Leftrightarrow$ pode ser usado para indicar que duas equações são equivalentes.

$$A(x) = B(x) \Leftrightarrow A(x) \quad B(x) = 0$$

Assim, considerando um polinômio P(x) idêntico à diferença entre os polinômios A(x) e B(x), pode-se dizer que obter os elementos do conjunto solução da equação A(x) = B(x) significa determinar as raízes do polinômio P(x), tal que P(x) = A(x) – B(x). Ou seja:

$$A(x) \quad B(x) = 0 \Leftrightarrow P(x) = 0$$

Sendo assim, toda equação polinomial pode ser expressa por:

$$\sum_{p=0}^{n} a_p x^{n-p} = 0$$

Ou ainda por:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \quad \dots \quad + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n = 0$$

! Atenção

Importante lembrar que funções modulares, exponenciais, logarítmicas e trigonométricas não caracterizam funções polinomiais, bem como as funções potenciais em que o expoente da variável não é um número natural, como $y = x^{-1}$ ou $y = x^{0,5}$, por exemplo, não caracterizam polinômios. Por isso, os teoremas e demais conclusões tiradas neste capítulo não se aplicam quando a equação apresenta alguma dessas funções em sua composição.

Nos casos em que P(x) é uma função constante, P(x) = 0 é uma sentença matemática fechada e, portanto, verdadeira ou falsa independentemente do valor de *x*.

- $P(x) \equiv k$
  Se P(x) for o polinômio nulo (k = 0), todo número complexo será solução da equação P(x) = 0, e, se P(x) não for o polinômio nulo ($k \neq 0$), então nenhum número complexo será solução da equação.

Para um melhor entendimento destes casos particulares, pode-se representar o polinômio P(x) como uma função do tipo ax + k em que a = 0.

$$P(x) = 0 \cdot x + k$$

Dessa forma, considerando a equação P(x) = 0 no universo dos números complexos, seu conjunto solução terá apenas duas possibilidades.

- Se k = 0, então: $0 \cdot x + 0 = 0 \Rightarrow S = \mathbb{C}$.
- Se $k \neq 0$, então: $0 \cdot x + k = 0 \Rightarrow S = \varnothing$.

Grau de uma equação polinomial

O grau de uma equação algébrica representada na forma P(x) = 0 coincide com o grau do polinômio P(x). Entre os principais conhecimentos associados às equações polinomiais estão as relações existentes entre o grau da equação e a quantidade de soluções que ela possui de acordo com o domínio de sua variável. Essas relações serão enunciadas ao longo do capítulo.

Podemos dizer que nenhuma equação polinomial possui mais soluções do que o número que representa o seu grau, ou seja:

- Equações de grau zero não possuem soluções.
- Equações do 1º grau possuem no máximo uma solução cada.
- Equações do 2º grau possuem no máximo duas soluções cada.
- Equações do 3º grau possuem no máximo três soluções cada.

⋮

- Equações de grau *n* possuem no máximo *n* soluções cada.

Soluções de uma equação polinomial

A existência de soluções de uma equação do tipo P(x) = 0 depende de algumas características do polinômio P(x) como o grau do polinômio, o domínio e a série dos coeficientes.

Como visto acima, o número de soluções de uma equação polinomial está limitado pelo seu grau. Assim, sendo *n* o grau da equação e *s* o número de elementos do conjunto solução, tem-se, primeiramente, que $s \leq n$.

O domínio da variável de uma equação depende, principalmente, do contexto de aplicação da função polinomial. O contexto pode ser combinatório, geométrico, temporal ou físico, entre outros.

Veja o exemplo do polinômio $A(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$, que fornece o número de arranjos com 3 elementos extraídos de um mesmo conjunto J com *x* elementos. Nesse caso, o domínio da função é o conjunto dos números naturais: $x \in \mathbb{N}$.

Primeiramente observe o fato de que, se o conjunto J for vazio (x = 0), unitário (x = 1) ou binário (x = 2), então não será possível extrair dele algum arranjo com 3 elementos. Isso é mostrado pelos seguintes valores numéricos do polinômio A(x):

$$A(0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 = 0 - 0 + 0 = 0$$
$$A(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 = 1 - 3 + 2 = 0$$
$$A(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 = 8 - 12 + 4 = 0$$

Se J possuir exatamente 3 elementos, então será possível extrair dele 6 arranjos com 3 elementos:

$$A(3) = 3^3 - 3 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 = 27 - 27 + 6 = 6$$

Se J possuir exatamente 4 elementos, então será possível extrair dele 24 arranjos com 3 elementos:

$$A(4) = 4^3 \quad 3 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 = 64 \quad 48 + 8 = 24$$

E assim, por diante.

Considere, então, que esse polinômio seja usado para se descobrir qual quantidade de elementos deve possuir o conjunto J, para que possam ser feitos exatamente 720 arranjos distintos, com 3 de seus elementos.

Desse problema vem a equação:

$$x^3 - 3x^2 + 2x = 720$$

Sendo P(x) = A(x) – 720, a equação fica expressa na forma P(x) = 0, por:

$$x^3 \quad 3x^2 + 2x \quad 720 = 0$$

A equação cúbica (do 3º grau) obtida nesse exemplo possui apenas uma solução natural, x = 10:

$$x^3 - 3x^2 + 2x - 720 = 0, \text{ com } x \in \mathbb{N},$$
$$\text{então a solução é } S = \{10\}.$$

Neste exemplo tem-se que:

- O grau da equação é n = 3;
- O número de soluções é s = 1.

Outro exemplo é o do polinômio $V(x) = 8x^2 - x$, que fornece o volume, em m^3, de um prisma quadrangular regular cujas arestas da base medem *x* m. Neste caso, o domínio da função não possui números negativos: $x \in \mathbb{R}_+$.

Considere que esse polinômio seja usado para obter o comprimento do lado da base que o prisma deve ter para que seu volume seja de 24 m^3. Desse problema vem a equação:

$$8x^2 \quad x^3 = 24$$

Sendo P(x) = V(x) – 24, a equação fica expressa na forma P(x) = 0, por:

$$x^3 + 8x^2 \quad 24 = 0$$

A equação cúbica anterior possui apenas duas soluções reais positivas: $x = 2$ e $x = 3 + \sqrt{21}$.

$$x^3 + 8x^2 \quad 24 = 0, \text{ com } x \in \mathbb{R}_+,$$
$$\text{então a solução é } S = \{2,\ 3 + \sqrt{21}\}.$$

Neste exemplo tem-se que:

- O grau da equação é n = 3;
- O número de soluções é s = 2.

Não havendo restrição para os domínios das equações polinomiais usadas nos dois exemplos acima, cada equação teria três soluções complexas. Veja:

$$x^3 - 3x^2 + 2x - 720 = 0 \Leftrightarrow S = \left\{10,\ \frac{-7 - i\sqrt{239}}{2},\ \frac{-7 + i\sqrt{239}}{2}\right\}$$

$$-x^3 + 8x^2 - 24 = 0 \Leftrightarrow S = \{2,\ 3 - \sqrt{21},\ 3 + \sqrt{21}\}$$

Nessas condições tem-se, para ambos os exemplos, que:

- O grau da equação é n = 3;
- O número de soluções é s = 3.

No primeiro exemplo, a equação possui uma solução inteira e positiva e mais duas soluções complexas, que são conjugadas uma da outra; no outro exemplo, a equação possui uma solução inteira e positiva e mais duas soluções irracionais, sendo uma positiva e outra negativa.

! Atenção

Equações polinomiais com coeficientes complexos não reais também podem possuir soluções reais.

Veja que: $x^2 + (1 - i)x - i = 0 \Leftrightarrow S = \{-1, i\}$

Mesmo sem restrições de coeficientes ou domínio, isto é, com $x \in \mathbb{C}$, o número de soluções de uma equação do tipo P(x) = 0 pode variar de acordo com os coeficientes do polinômio P(x). Exemplos:

- A equação $x^3 + x^2 + 4x + 4 = 0$, com $x \in \mathbb{C}$, possui três soluções: $S = \{-1, 2i, -2i\}$.
- A equação $x^3 + 5x^2 + 7x + 3 = 0$, com $x \in \mathbb{C}$, possui apenas duas soluções: $S = \{-1, -3\}$.
- A equação $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$, com $x \in \mathbb{C}$, possui apenas uma solução: $S = \{-1\}$.

Fórmulas resolutivas de equações polinomiais

A busca de expressões algébricas capazes de fornecer as soluções de uma equação do tipo P(x) = 0 em função dos valores dos coeficientes do polinômio P(x) foi objeto de estudo dos grandes matemáticos desde a Antiguidade.

Os trabalhos de Diofanto de Alexandria (século III d.C.) já tratavam de equações do 1º e 2º graus. No mundo árabe, o matemático persa Abu Alcuarismi (século IX) apresentou os primeiros métodos sistemáticos para resolver esses tipos de equações. Os primeiros trabalhos a respeito das equações do 3º grau são de outro matemático persa chamado Omar Caiam (século XI), mas o método resolutivo desse tipo de equação só foi sistematizado com contribuições de outros matemáticos italianos dos séculos XV e XVI.

O método resolutivo das equações do 4º grau, desenvolvido pelo matemático italiano Lodovico Ferrari (século XVI), consiste em utilizar uma variável auxiliar que pode ser obtida ao resolver uma equação do 3º grau. A partir daí, a comunidade matemática da época passou a acreditar que seria possível resolver todas as equações polinomiais de grau *n* introduzindo variáveis auxiliares que poderiam ser encontradas resolvendo se equações de grau (n 1), mas, infelizmente, provou-se que essa ideia estava errada.

A teoria desenvolvida nos séculos XVIII e XIX pelos matemáticos Paolo Ruffini, Evariste Galois e Niels Abel mostrou que nem todas as equações de grau maior que 5 poderiam ser resolvidas por processos similares àqueles obtidos para as equações de grau inferior. O estudo para obter um método de resolução dessas equações continua até os dias de hoje.

Entre esses estudos, vale ressaltar um trabalho publicado em 2019, de um matemático brasileiro chamado Rodrigo Martinelli, que apresenta uma técnica para resolver diversos tipos de equações do 5º grau e que também pode ser usado para se resolver qualquer equação do 4º grau.

Fórmula resolutiva de uma equação do 1º grau

As equações polinomiais do 1º grau podem ser expressas por:

$$ax + b = 0,\ a \neq 0$$

Como essa equação só admite uma solução complexa, sua fórmula resolutiva é dada por:

$$x = -\frac{b}{a}$$

Veja os exemplos a seguir:

I. $2x + 8 = 0$

Temos $a = 2$ e $b = 8$, então, a única solução da equação é $x = -\frac{b}{a} = -\frac{8}{2} = -4$.

Portanto, o conjunto solução dessa equação é $S = \{-4\}$.

II. $3x - \frac{7}{2} = 0$

Temos $a = 3$ e $b = \frac{7}{2}$, então a única solução da equação é $x = \frac{b}{a} = \frac{\left(\frac{7}{2}\right)}{3} = \frac{7}{6}$.

Portanto, o conjunto solução dessa equação é $S = \left\{\frac{7}{6}\right\}$.

III. $-x + (2 - i) = 0$

Temos $a = -1$ e $b = 2 - i$, então a única solução é $x = -\frac{b}{a} = -\frac{2-i}{-1} = 2 - i$.

Portanto, o conjunto solução da equação é $S = \{2 - i\}$.

Fórmula resolutiva de uma equação do 2º grau

As equações polinomiais do 2º grau podem ser expressas por:

$$ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0$$

Como essa equação pode admitir até duas soluções complexas, suas fórmulas resolutivas são:

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Nessas fórmulas, o parâmetro dentro das raízes quadradas denomina-se discriminante e é dado por:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

O número de soluções da equação e o conjunto numérico à qual elas pertencem podem ser previstos pelo valor desse parâmetro, da seguinte maneira:

- Se $\Delta > 0$, então, a equação possui duas soluções reais.
- Se $\Delta = 0$, então, a equação possui apenas uma solução real.
- Se $\Delta < 0$, então, a equação possui duas soluções não reais conjugadas.

Veja os exemplos a seguir:

I. $4x^2 + 3x - 1 = 0$

Temos $a = 4$, $b = 3$ e $c = -1$. Então, o discriminante da equação é:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-1) = 9 + 16 = 25$$

E as soluções são:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3-\sqrt{25}}{2\cdot 4} = \frac{-3-5}{8} = \frac{-8}{8} = -1 \\ x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3\ \sqrt{25}}{2\cdot 4} = \frac{3\ \ 5}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Portanto, o conjunto solução da equação é $S = \left\{\ 1,\ \frac{1}{4}\right\}$.

II. $x^2 + 6x + 9 = 0$

Temos $a = 1$, $b = 6$ e $c = 9$. Então, o discriminante da equação é:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 36 - 36 = 0$$

E as soluções são:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6-\sqrt{0}}{2\cdot 1} = \frac{-6-0}{2} = \frac{-6}{2} = \ 3 \\ x_2 = \frac{b\ \ \Delta}{2a} = \frac{-6+\sqrt{0}}{2\cdot 1} = \frac{-6+0}{2} = \frac{-6}{2} = -3 \end{cases}$$

Portanto, o conjunto solução da equação é $S = \{\ 3\}$.

III. $x^2 + 9 = 0$

Temos $a = 1$, $b = 0$ e $c = 9$. Então, o discriminante da equação é:

$$\Delta = b^2\ \ 4ac = 0^2\ \ 4 \cdot 1 \cdot 9 = 0\ \ 36 =\ \ 36$$

E as soluções são:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-0-\sqrt{-36}}{2\cdot 1} = \frac{-0-6i}{2} = \frac{-6i}{2} = -3i \\ x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-0+\sqrt{-36}}{2\cdot 1} = \frac{-0+6i}{2} = \frac{6i}{2} = 3i \end{cases}$$

Portanto, o conjunto solução da equação é $S = \{-3i, 3i\}$.

Fórmula resolutiva de uma equação do 3º grau

As equações polinomiais do 3º grau podem ser expressas por:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,\ a \neq 0$$

Como essa equação pode admitir até três soluções complexas, suas fórmulas resolutivas são:

$$x_1 = \frac{b}{3a} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

$$x_2 = \frac{-b}{3a} + \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

$$x_3 = \frac{-b}{3a} + \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Nessas fórmulas, os parâmetros dentro das raízes cúbicas e quadradas são:

$$p = \frac{b^2 - 3ac}{3a^2} \quad \text{e} \quad q = \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a}$$

Em equações do 3º grau o parâmetro Δ é definido por: $\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3$.

O número de soluções da equação e o conjunto numérico à qual elas pertencem também podem ser previstos pelo valor desses parâmetros, da seguinte maneira:

- Se $\Delta > 0$, então, a equação possui uma solução real e duas soluções não reais conjugadas.
- Se $\Delta = 0$ e $q = 0$, então, a equação possui apenas uma solução real.
- Se $\Delta = 0$ e $q \neq 0$, então, a equação possui duas soluções reais.
- Se $\Delta < 0$, então, a equação possui três soluções reais.

Veja os exemplos a seguir:

I. $x^3 - 6x^2 + 6x - 5 = 0$

Temos $a = 1$, $b = -6$, $c = 6$ e $d = -5$. Então, os primeiros parâmetros auxiliares são:

$$\begin{cases} p = \dfrac{b^2 - 3ac}{3a^2} = \dfrac{(-6)^2 - 3 \cdot 1 \cdot 6}{3 \cdot 1^2} = \dfrac{36 - 18}{3} = \dfrac{18}{3} = 6 \\ q = \dfrac{2b^3}{27a^3} - \dfrac{bc}{3a^2} + \dfrac{d}{a} = \dfrac{2 \cdot (-6)^3}{27 \cdot 1^3} - \dfrac{(-6) \cdot 6}{3 \cdot 1^2} + \dfrac{(-5)}{1} = \dfrac{2 \cdot (-6)^3}{27 \cdot 1^3} - \dfrac{(-6) \cdot 6}{3 \cdot 1^2} + \dfrac{(-5)}{1} = -16 + 12 - 5 = -9 \end{cases}$$

O discriminante da equação vale:

$$\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = \left(\frac{-9}{2}\right)^2 - \left(\frac{6}{3}\right)^3 = \frac{81}{4} - 8 = \frac{81 - 32}{4} = \frac{49}{4}$$

Então, a primeira solução da equação é:

$$x_1 = \frac{-b}{3a} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}} = \frac{-(-6)}{3 \cdot 1} + \sqrt[3]{-\frac{(-9)}{2} + \sqrt{\frac{49}{4}}} + \sqrt[3]{-\frac{(-9)}{2} - \sqrt{\frac{49}{4}}}$$

$$x_1 = \frac{6}{3} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \frac{7}{2}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \frac{7}{2}} = 2 + \sqrt[3]{\frac{16}{2}} + \sqrt[3]{\frac{2}{2}}$$

$$x_1 = 2 + \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{1} = 2 + 2 + 1 = 5$$

Aproveitando as raízes cúbicas encontradas no cálculo de x_1, tem-se que as demais soluções da equação são:

$$x_2 = 2 + \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right) \cdot 2 + \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right) \cdot 1 = \frac{4 - 2 + 2i\sqrt{3} - 1 - i\sqrt{3}}{2} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$$

$$x_3 = 2 + \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right) \cdot 2 + \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right) \cdot 1 = \frac{4 - 2 - 2i\sqrt{3} - 1 + i\sqrt{3}}{2} = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$$

Portanto, o conjunto solução da equação é $S = \left\{5, \frac{1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right\}$.

II. $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$

Temos $a = 1$, $b = 3$, $c = 3$ e $d = 1$. Então, os primeiros parâmetros auxiliares são:

$$\begin{cases} p = \dfrac{b^2 - 3ac}{3a^2} = \dfrac{3^2 - 3 \cdot 1 \cdot 3}{3 \cdot 1^2} = \dfrac{9 - 9}{3} = \dfrac{0}{3} = 0 \\ q = \dfrac{2b^3}{27a^3} - \dfrac{bc}{3a^2} + \dfrac{d}{a} = \dfrac{2 \cdot 3^3}{27 \cdot 1^3} - \dfrac{3 \cdot 3}{3 \cdot 1^2} + \dfrac{1}{1} = \dfrac{2 \cdot 27}{27} - \dfrac{9}{3} + 1 = 2 - 3 + 1 = 0 \end{cases}$$

O discriminante da equação vale:

$$\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = \left(\frac{0}{2}\right)^2 - \left(\frac{0}{3}\right)^3 = 0 - 0 = 0$$

Então, a primeira solução da equação é:

$$x_1 = \frac{-3}{3\cdot 1} + \sqrt[3]{-\frac{0}{2} + \sqrt{0}} + \sqrt[3]{-\frac{0}{2} - \sqrt{0}} = \frac{-3}{3} + \sqrt[3]{0+0} + \sqrt[3]{0-0} = -1 + 0 + 0 = -1$$

Aproveitando as raízes cúbicas encontradas no cálculo de x_1, tem-se que as demais soluções da equação são:

$$x_2 = -1 + \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\cdot 0 + \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)\cdot 0 = -1 + 0 + 0 = -1$$

$$x_3 = -1 + \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)\cdot 0 + \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\cdot 0 = -1 + 0 + 0 = -1$$

Portanto, como $x_1 = x_2 = x_3$, o conjunto solução da equação é unitário: $S = \{-1\}$.

III. $2x^3 + 6x^2 - 18x - 54 = 0$

Temos $a = 2$, $b = 6$, $c = -18$ e $d = -54$. Então, os primeiros parâmetros auxiliares são:

$$\begin{cases} p = \dfrac{b^2 - 3ac}{3a^2} = \dfrac{6^2 - 3\cdot 2\cdot(-18)}{3\cdot 2^2} = \dfrac{36+108}{12} = \dfrac{144}{12} = 12 \\ q = \dfrac{2b^3}{27a^3} - \dfrac{bc}{3a^2} + \dfrac{d}{a} = \dfrac{2\cdot 6^3}{27\cdot 2^3} - \dfrac{6\cdot(-18)}{3\cdot 2^2} + \dfrac{-54}{2} = \dfrac{432}{216} - \dfrac{-108}{12} - 27 = 2 + 9 - 27 = -16 \end{cases}$$

O discriminante da equação vale:

$$\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = \left(\frac{-16}{2}\right)^2 - \left(\frac{12}{3}\right)^3 = (-8)^2 - 4^3 = 64 - 64 = 0$$

Então, a primeira solução da equação é:

$$x_1 = \frac{-6}{3\cdot 2} + \sqrt[3]{-\frac{(-16)}{2} + \sqrt{0}} + \sqrt[3]{-\frac{(-16)}{2} - \sqrt{0}} = \frac{-6}{6} + \sqrt[3]{8+0} + \sqrt[3]{8-0} = -1 + 2 + 2 = 3$$

Aproveitando as raízes cúbicas encontradas no cálculo de x_1, tem-se que as demais soluções da equação são:

$$x_2 = -1 + \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\cdot 2 + \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)\cdot 2 = \frac{-2-2+2i\sqrt{3}-2-2i\sqrt{3}}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

$$x_3 = -1 + \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)\cdot 2 + \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\cdot 2 = \frac{-2-2-2i\sqrt{3}-2+2i\sqrt{3}}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

Portanto, como $x_2 = x_3$, o conjunto solução da equação é binário: $S = \{-3, 3\}$.

! Atenção

Note que nenhum dos exemplos de equações cúbicas anteriores apresentam discriminante negativo ($\Delta < 0$). Isso só acontece quando a equação possui três soluções reais distintas.

IV. $x^3 - 6x + 4 = 0$

Tem-se que $a = 1$, $b = 0$, $c = -6$ e $d = 4$. Assim, os primeiros parâmetros auxiliares são:

$$\begin{cases} p = \dfrac{b^2 - 3ac}{3a^2} = \dfrac{0^2 - 3\cdot 1\cdot(-6)}{3\cdot 1^2} = \dfrac{0+18}{3} = \dfrac{18}{3} = 6 \\ q = \dfrac{2b^3}{27a^3} - \dfrac{bc}{3a^2} + \dfrac{d}{a} = \dfrac{2\cdot 0^3}{27\cdot 1^3} - \dfrac{0\cdot(-6)}{3\cdot 1^2} + \dfrac{4}{1} = \dfrac{0}{27} - \dfrac{0}{3} + 4 = 0 + 0 + 4 = 4 \end{cases}$$

O discriminante da equação vale: $\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = \left(\frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{6}{3}\right)^3 = 2^2 - 2^3 = 4 - 8 = -4$.

Então, a primeira solução da equação é:

$$x_1 = \frac{-b}{3a} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}} = \frac{-0}{3\cdot 1} + \sqrt[3]{-\frac{4}{2} + \sqrt{-4}} + \sqrt[3]{-\frac{4}{2} - \sqrt{-4}}$$

$$x_1 = 0 + \sqrt[3]{-2+2i} + \sqrt[3]{-2-2i} = \sqrt[3]{-2+2i} + \sqrt[3]{-2-2i}$$

Neste ponto da resolução, para que sejam extraídas as raízes cúbicas de $-2 + 2i$ e $-2 - 2i$, recomenda-se o uso das formas polares dos complexos.

Assim, sendo $z = \ \ 2 + 2i$, tem-se:

$$\begin{cases} |z| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \\ Arg(z) = 135^\circ \end{cases}$$

Então, uma das raízes cúbicas de z é o número complexo w tal que: $\begin{cases} |w| = \sqrt[3]{|z|} = \sqrt[3]{\sqrt{8}} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2} \\ Arg(w) = \dfrac{135^\circ}{3} = 45^\circ \end{cases}$.

Usando a forma trigonométrica dos números complexos:

$$w = \sqrt{2}(\cos 45^\circ + i \cdot \text{sen} 45^\circ) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 + i$$

Por serem complexos conjugados, os números $\ \ 2 + 2i$ e $-2 - 2i$ possuem raízes cúbicas que também são conjugadas uma da outra. Então, retornando à expressão resolutiva:

$$x_1 = \sqrt[3]{-2+2i} + \sqrt[3]{-2-2i} = \sqrt[3]{(1+i)^3} + \sqrt[3]{(1-i)^3} = 1 + i + 1 - i = 2$$

Aproveitando os resultados das raízes cúbicas no cálculo de x_1, tem-se que as outras soluções são:

$$x_2 = 0 + \left(\frac{\ 1 + i\sqrt{3}}{2}\right) \cdot (1+i) + \left(\frac{\ 1 \ \ i\sqrt{3}}{2}\right) \cdot (1 \ \ i)$$

$$= \frac{\ 1 \ \ i \ \ i\sqrt{3} \ \ \sqrt{3}}{2} + \frac{\ 1 \ \ i \ \ i\sqrt{3} \ \ \sqrt{3}}{2} = \ \ 1 \ \ \sqrt{3}$$

$$x_3 = 0 + \left(\frac{\ 1 \ \ i\sqrt{3}}{2}\right) \cdot (1+i) + \left(\frac{\ 1 + i\sqrt{3}}{2}\right) \cdot (1 \ \ i)$$

$$= \frac{-1 - i - i\sqrt{3} + \sqrt{3}}{2} + \frac{-1 + i + i\sqrt{3} + \sqrt{3}}{2} = \ \ 1 + \sqrt{3}$$

Portanto, o conjunto solução da equação é $S = \{2, \ \ 1 \ \ \sqrt{3}, \ \ 1 \ \ \sqrt{3}\}$.

Fórmula resolutiva de uma equação de 4º grau

As equações polinomiais do 4º grau podem ser expressas por:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0, a \neq 0$$

Essa equação pode admitir até quatro soluções complexas, mas suas fórmulas resolutivas são tão extensas que não caberiam em uma única página.

Particularmente quando os coeficientes b e d são nulos, a equação não apresenta os termos de grau ímpar e, nesse caso, admitem fórmulas resolutivas relativamente simples.

Assim, considerando $b = d = 0$, tem-se:

$$ax^4 + cx^2 + e = 0, a \neq 0$$

Equações como essa são denominadas biquadradas e as fórmulas para encontrar suas quatro possíveis soluções são:

$$x_1 = +\sqrt{\frac{\ c \ \ \sqrt{c^2 \ \ 4ae}}{2a}} \qquad x_3 = +\sqrt{\frac{-c + \sqrt{c^2 \ \ 4ae}}{2a}}$$

$$x_2 = -\sqrt{\frac{-c - \sqrt{c^2 - 4ae}}{2a}} \qquad x_4 = -\sqrt{\frac{-c + \sqrt{c^2 - 4ae}}{2a}}$$

No caso, o discriminante é $\Delta = c^2 - 4ae$.

Veja os exemplos a seguir:

I. $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

Temos $a = 1$, $b = 0$, $c = -13$, $d = 0$ e $e = 36$. Então, o discriminante da equação é:

$$\Delta = c^2 - 4ae = (-13)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36 = 169 - 144 = 25$$

E suas soluções são:

$$x_1 = +\sqrt{\frac{-c - \sqrt{\Delta}}{2a}} = +\sqrt{\frac{-(-13) - \sqrt{25}}{2 \cdot 1}} = +\sqrt{\frac{13 - 5}{2}} = +\sqrt{4} = +2$$

$$x_2 = -\sqrt{\frac{\ c \ \ \sqrt{\Delta}}{2a}} = -\sqrt{\frac{\ (\ \ 13) \ \ \sqrt{25}}{2 \cdot 1}} = -\sqrt{\frac{13 \ \ 5}{2}} = -\sqrt{4} = -2$$

$$x_3 = +\sqrt{\frac{-c + \sqrt{\Delta}}{2a}} = +\sqrt{\frac{-(-13) + \sqrt{25}}{2 \cdot 1}} = +\sqrt{\frac{13 + 5}{2}} = +\sqrt{9} = +3$$

$$x_4 = -\sqrt{\frac{-c + \sqrt{\Delta}}{2a}} = -\sqrt{\frac{-(\ \ 13) \ \ \sqrt{25}}{2 \cdot 1}} = -\sqrt{\frac{13 + 5}{2}} = -\sqrt{9} = -3$$

Portanto, o conjunto solução da equação é $S = \{+2, -2, +3, -3\}$.

II. $x^4 + 2x^2 - 8 = 0$

Temos $a = 1$, $b = 0$, $c = 2$, $d = 0$ e $e = -8$. Então, o discriminante da equação é:

$$\Delta = c^2 \ \ 4ae = 2^2 \ \ 4 \cdot 1 \cdot (\ \ 8) = 4 + 32 = 36$$

E suas soluções são:

$$x_1 = +\sqrt{\frac{-c - \sqrt{\Delta}}{2a}} = +\sqrt{\frac{-2 - \sqrt{36}}{2 \cdot 1}} = +\sqrt{\frac{-2 - 6}{2}} = +\sqrt{-4} = +2i$$

$$x_2 = -\sqrt{\frac{-c - \sqrt{\Delta}}{2a}} = -\sqrt{\frac{-2 - \sqrt{36}}{2 \cdot 1}} = -\sqrt{\frac{-2 - 6}{2}} = -\sqrt{-4} = -2i$$

$$x_3 = +\sqrt{\frac{-c + \sqrt{\Delta}}{2a}} = +\sqrt{\frac{\ 2 \ \ \sqrt{36}}{2 \cdot 1}} = +\sqrt{\frac{\ 2 \ \ 6}{2}} = +\sqrt{2}$$

$$x_4 = -\sqrt{\frac{-c + \sqrt{\Delta}}{2a}} = -\sqrt{\frac{-2 + \sqrt{36}}{2 \cdot 1}} = -\sqrt{\frac{-2 + 6}{2}} = -\sqrt{2}$$

Portanto, o conjunto solução da equação é $S = \{+2i, -2i, +\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$.

III. $9x^4 - 6x^2 + 1 = 0$

Temos $a = 9$, $b = 0$, $c = -6$, $d = 0$ e $e = 1$. Então, o discriminante da equação é:

$$\Delta = c^2 - 4ae = (-6)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 1 = 36 - 36 = 0$$

E suas soluções são:

$$x_1 = +\sqrt{\frac{-c \ \ \sqrt{\Delta}}{2a}} = +\sqrt{\frac{-(-6) - \sqrt{0}}{2 \cdot 9}} = +\sqrt{\frac{6 \ \ 0}{18}} = +\sqrt{\frac{1}{3}} = +\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$x_2 = -\sqrt{\frac{-c - \sqrt{\Delta}}{2a}} = -\sqrt{\frac{-(-6) - \sqrt{0}}{2 \cdot 9}} = -\sqrt{\frac{6 - 0}{18}} = -\sqrt{\frac{1}{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$x_3 = +\sqrt{\frac{-c + \sqrt{\Delta}}{2a}} = +\sqrt{\frac{-(-6) + \sqrt{0}}{2 \cdot 9}} = +\sqrt{\frac{6 + 0}{18}} = +\sqrt{\frac{1}{3}} = +\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$x_4 = -\sqrt{\frac{\ c \ \ \sqrt{\Delta}}{2a}} = -\sqrt{\frac{-(\ \ 6) \ \ \sqrt{0}}{2 \cdot 9}} = -\sqrt{\frac{6 + 0}{18}} = -\sqrt{\frac{1}{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Portanto, o conjunto solução da equação é $S = \left\{+\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$.

! Atenção

Com exceção das equações do 1º grau, todas as fórmulas resolutivas das demais equações polinomiais apresentam operações de radiciação, como raízes quadradas e cúbicas, por exemplo. Por esse motivo é comum que as soluções dessas equações também sejam chamadas de raízes da equação ou raízes do polinômio.

Por isso, em relação a uma equação do tipo $P(x) = 0$, com $P(x) = x^3 + x^2 - 12$, por exemplo, estão corretas as seguintes afirmações:

- $x = 2$ é uma **solução** da equação $x^3 + x^2 - 12 = 0$.
- $x = 2$ é uma **raiz** da equação $x^3 + x^2 - 12 = 0$.
- $x = 2$ é um **zero** do polinômio $P(x)$.
- $x = 2$ é uma **raiz** do polinômio $P(x)$.

Em uma época em que não havia calculadoras para efetuar os cálculos que definiam a solução de uma equação algébrica de grau elevado, perdia-se muito mais tempo calculando raízes quadradas e cúbicas do que efetuando os outros processos aritméticos envolvidos.

Atualmente, o termo raiz também é usado para designar soluções de outros tipos de equação, como equações exponenciais, equações modulares, entre outras.

Raízes de polinômios × Soluções de equações

Embora ambos os termos (raízes e soluções) sejam usados para designar os mesmos números, há uma sutil distinção entre seus significados.

> Solução de uma equação é o valor que a variável assume, para tornar verdadeira a sentença que expressa a equação.

Considere, por exemplo, a equação $x^3 + 30 = 6x^2 + x$. Sabe-se que $x = -2$ é uma solução da equação pois, substituindo x por -2, obtém-se uma igualdade verdadeira. Observe:

$$(-2)^3 + 30 = 6\cdot(-2)^2 + (-2)$$
$$-8 + 30 = 24 - 2$$
$$22 = 22 \quad \text{(Verdadeira)}$$

Pode-se afirmar, também, que $x = 3$ é outra solução da equação. Observe:

$$3^3 + 30 = 6\cdot 3^2 + 3$$
$$27 + 30 = 54 + 3$$
$$57 = 57 \quad \text{(Verdadeira)}$$

Analogamente, $x = 5$ também é solução da equação.

$$5^3 + 30 = 6\cdot 5^2 + 5$$
$$125 + 30 = 150 + 5$$
$$155 = 155 \quad \text{(Verdadeira)}$$

As raízes de um polinômio $P(x) = a_0 \cdot (x - \alpha_1) \cdot (x - \alpha_2) \cdot (x - \alpha_3) \cdot ... \cdot (x - \alpha_n)$, com $a_0 \neq 0$, são os números $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n$ que anulam, respectivamente, seus fatores do 1º grau.

Considere, por exemplo, o polinômio $P(x) = 1 \cdot (x + 2) \cdot (x - 3) \cdot (x - 5)$. Temos que -2, 3 e 5 são raízes do polinômio $P(x)$ pois anulam, repectivamente, os fatores $(x + 2)$, $(x - 3)$ e $(x - 5)$.

Não é por acaso que, no exemplo, as soluções da equação coincidem com as raízes do polinômio apresentado em sua forma fatorada. Observe P(x) em sua forma geral:

$$P(x) = 1\cdot(x+2)\cdot(x-3)\cdot(x-5)$$
$$P(x) = (x^2 - 3x + 2x - 6)\cdot(x-5)$$
$$P(x) = x^3 - 5x^2 - 3x^2 + 15x + 2x^2 - 10x - 6x + 30$$
$$P(x) = x^3 - 6x^2 - x + 30$$

Note que $P(x) = 0$ equivale à equação dada no exemplo.

$$x^3 - 6x^2 - x + 30 = 0 \Leftrightarrow x^3 + 30 = 6x^2 + x$$

A diferença dos conceitos de solução de equação polinomial e de raiz de polinômio pode ser mais bem observada em equações cujo número de soluções é menor do que o número representa o seu grau.

Entre os exemplos dados anteriormente, a equação $x^2 + 6x + 9 = 0$ é do 2º grau, mas possui apenas uma solução: $x = -3$. Isso ocorre porque, em sua forma fatorada, o polinômio $A(x) = x^2 + 6x + 9$ possui dois fatores do 1º grau idênticos: $A(x) = (x + 3) \cdot (x + 3)$. Nesse caso, diz-se que o polinômio possui duas raízes iguais ou que $x = -3$ é uma **raiz dupla**.

Também presente entre os exemplos anteriores, a equação $2x^3 + 6x^2 - 18x - 54 = 0$ é do 3º grau, mas possui apenas duas soluções: $x = +3$ ou $x = -3$.

Isso ocorre porque, em sua forma fatorada, o polinômio $B(x) = 2x^3 + 6x^2 - 18x - 54$ também possui dois fatores do 1º grau idênticos, entre seus três fatores: $B(x) = 2 \cdot (x - 3) \cdot (x + 3) \cdot (x + 3)$. Neste caso, diz-se que duas das três raízes do polinômio são iguais ou ainda que $x = +3$ é raiz simples de $B(x)$ e $x = -3$ é raiz dupla de $B(x)$.

Para efeito comparativo, considere como exemplo a equação $x^3 - 3x^2 - 9x + 27 = 0$ que também é do 3º grau e possui as mesmas duas soluções da equação anterior: $x = +3$ ou $x = -3$.

Isso também ocorre porque o polinômio $C(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 27$, em sua forma fatorada, também possui fatores do 1º grau idênticos. A diferença em relação ao exemplo anterior é exatamente o fator que se repete: $C(x) = (x - 3) \cdot (x - 3) \cdot (x + 3)$.

Nesse caso, tem-se que $x = +3$ é raiz dupla de $C(x)$ e $x = -3$ é raiz simples de $C(x)$.

Assim, embora as equações $B(x) = 0$ e $C(x) = 0$ tenham o mesmo conjunto solução, elas não possuem exatamente as mesmas raízes. Observe:

Equação	Conjunto solução	Raízes da equação
$2x^3 + 6x^2 - 18x - 54 = 0$	$S = \{+3, -3\}$	$x_1 = +3$ $x_2 = -3$ $x_3 = -3$
$x^3 - 3x^2 - 9x + 27 = 0$	$S = \{+3, -3\}$	$x_1 = +3$ $x_2 = +3$ $x_3 = -3$

Também podemos afirmar que as raízes dessas equações não possuem a mesma multiplicidade.

Saiba mais

Diante da dificuldade de memorização das fórmulas resolutivas das equações polinomiais do 3º e 4º graus, em relação à fórmula quadrática, e da extensão dos processos aritméticos encadeados por elas, muitas outras técnicas foram desenvolvidas para se chegar ao conjunto solução desses tipos de equações.

Durante os séculos que se seguiram às descobertas das fórmulas cúbicas e quárticas, matemáticos franceses, como René Descartes, Jean d'Alembert e Albert Girard, buscaram por métodos alternativos que pudessem levar à solução de equações de grau maior. Nesse período, muitas conquistas foram alcançadas em casos particulares, mas nenhuma nova fórmula geral foi encontrada.

Neste período os estudos levavam em consideração permutações das sequências numéricas determinadas pelas raízes x_p, com $1 \le p \le n$, de uma equação polinomial de grau *n*, pois esses valores eram encontrados em ordens diferentes, por métodos diferentes. Então, não era importante saber exatamente qual solução da equação corresponde à raiz x_1 e qual corresponde à raiz x_2.

Assim, parâmetros como a soma e o produto das raízes de uma equação polinomial passaram a ser o foco da atenção dos estudos que buscavam pela solução geral das equações do 5º grau e de grau maior.

Somente no século XIX ficou demonstrado, pelo matemático italiano Paolo Ruffini e o norueguês Niels Abel, que não era possível resolver todo tipo de equação quíntica, ou de grau maior que 5, por meio de radicais. A partir daí, novas abordagens surgiram incorporando conceitos de limites e continuidade de funções por matemáticos como Gauss e Cauchy.

Teorema fundamental da Álgebra (TFA)

No século XVII, em sua obra *La Géométrie*, René Descartes já havia afirmado que as equações de grau *n* deveriam possuir *n* raízes, mas que estas podiam não cor responder a números reais. Somente no início do século XIX a primeira demonstração rigorosa foi dada pelo francês Jean-Robert Argand, para o teorema que diz:

Toda equação polinomial de grau $n \ge 1$ possui ao menos uma solução no conjunto dos números complexos.

Em linguagem matemática, podemos escrever:

$$\forall P(x) \mid gr(P) \ge 1 \Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{C} \mid P(\alpha) = 0$$

Em termos de raízes de polinômios, o mesmo teorema pode ser enunciado como:

Todo polinômio de grau $n \ge 1$ possui exatamente *n* raízes complexas.

Essa versão mais precisa do teorema fundamental da Álgebra também é conhecida como teorema da decomposição de polinômios.

Teorema da decomposição

Considere que o número complexo x_1 seja solução da equação $P(x) = 0$, de grau $n > 1$. Neste caso, tem-se que o polinômio $P(x)$ é divisível pelo binômio $(x - x_1)$ e, portanto, deve existir outro polinômio $Q_1(x)$ de grau $(n - 1)$ que satisfaz a identidade.

$$P(x) \equiv (x \quad x_1) \cdot Q_1(x)$$

Voltando à equação $(x \quad x_1) \cdot Q_1(x) = 0$, temos: $x = x_1$ ou $Q_1(x) = 0$.

De acordo com o teorema fundamental da Álgebra, a equação $Q_1(x) = 0$ deve possuir uma solução no conjunto dos números complexos. Considere, então, que o número complexo α_2 seja solução dessa equação.

Se a equação $Q_1(x) = 0$ for do 1º grau, então as raízes da equação $P(x) = 0$ serão x_1 e x_2, podendo ou não terem o mesmo valor. Mas, se o grau da equação $Q_1(x) = 0$ for maior que 1, o polinômio $Q_1(x)$ é divisível pelo binômio $(x - x_2)$ devendo existir mais um polinômio $Q_2(x)$ de grau $n - 2$ que satisfaz as identidades:

$$Q_1(x) \equiv (x - x_2) \cdot Q_2(x)$$
$$P(x) \equiv (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot Q_2(x)$$

Da equação $Q_1(x) = 0$, da primeira identidade, tem-se: $(x - x_2) \cdot Q(x) = 0$, então $x = x_2$ ou $Q_2(x) = 0$.

Já em relação à equação original $P(x) = 0$, da segunda identidade, tem-se: $(x \quad x_1) \cdot (x \quad x_2) \cdot Q_2(x) = 0$.

Pode-se proceder dessa maneira enquanto o grau dos polinômios $Q_P(x)$, quocientes das divisões polinômiais, forem maiores que 1.

$$P(x) \equiv (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_P) \cdot Q_P(x)$$

Somente após $(n - 1)$ divisões polinomiais, como estas, é que o quociente $Q_{n-1}(x)$ será um polinômio do 1º grau e, portanto, da forma $ax + b$ com $a \ne 0$.

$$P(x) \equiv (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_{n-1}) \cdot (ax + b)$$

Então, o número complexo $x_n = \dfrac{-b}{a}$ será a última raiz encontrada para a equação $P(x) = 0$.

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow a(x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_{n-1}) \cdot (x - x_n) = 0$$

Assim, pode-se observar que, a quantidade de raízes de uma equação polinomial sempre coincide com o grau da equação. Como a fórmula resolutiva das equações do 2º grau é simples, quando comparada às fórmulas para as equações do 3º e 4º graus, na prática, o teorema da decomposição costuma ser usado até se obter um quociente do 2º grau, pois assim as duas últimas raízes da equação podem ser encontradas pela fórmula quadrática.

Dessa forma, ao se resolver uma equação do 3º grau, por exemplo, a dificuldade está em obter a primeira raiz. Uma vez conhecida umas das raízes da equação cúbica, as outras duas podem ser obtidas resolvendo uma equação do 2º grau cujos coeficientes são determinados pelo dispositivo de Ruffini, no quociente de uma divisão polinomial.

Veja os exemplos a seguir:

I. $x^3 + x^2 + 4x + 4 = 0$

Sabe-se que $x_1 = -1$ é uma solução, então, aplicando o dispositivo de Ruffini, temos:

1	1	1	4	4
	1	0	4	0

Como o resto da divisão é o polinômio nulo, obtemos a equação do 2º grau $x^2 + 4 = 0$.

Como a = 1, b = 0 e c = 4, da fórmula resolutiva têm-se:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0 - 16 = -16$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-0 - \sqrt{-16}}{2 \cdot 1} = \frac{-4i}{2} = -2i$$

$$x_3 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-0 + \sqrt{-16}}{2 \cdot 1} = \frac{+4i}{2} = +2i$$

Portanto o conjunto solução da equação $x^3 - x^2 + 4x + 4 = 0$ é S = {–1, –2i, 2i}.

II. $2x^3 + 10x^2 + 14x + 6 = 0$

Sabe-se que $x_1 = \quad 1$ é uma solução, então, aplicando o dispositivo de Ruffini, temos:

–1	2	10	14	6
	2	8	6	0

Como o resto da divisão é um polinômio nulo, obtemos a equação do 2º grau $2x^2 + 8x + 6 = 0$.

Como a = 2, b = 8 e c = 6, da fórmula resolutiva têm-se:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 8^2 - 4 \cdot 2 \cdot 6 = 64 - 48 = 16$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8 - \sqrt{16}}{2 \cdot 2} = \frac{-8 - 4}{4} = \frac{-12}{4} = -3$$

$$x_3 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8 + \sqrt{16}}{2 \cdot 2} = \frac{-8 + 4}{4} = \frac{-4}{4} = -1$$

Neste exemplo, duas das raízes são iguais $x_1 = x_3$, ou seja, –1 é raiz dupla. Assim, o conjunto solução da equação $2x^3 + 10x^2 + 14x + 6 = 0$ é S = { 1, 3}.

III. $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$

Nesta equação, $x_1 = -1$ também é raiz. Então:

–1	1	3	3	1
	1	2	1	0

Do dispositivo, obtemos $x^2 + 2x + 1 = 0$.

Como a = 1, b = 2 e c = 1, da fórmula resolutiva têm-se:

$$\Delta = b^2 \quad 4ac \quad \cdot 2^2 = 4 \quad 1 = 1 \quad 4 \quad 4 \quad 0$$

$$x_2 = \frac{-b \quad \Delta\sqrt{\ }}{2a} = \frac{2 \quad \sqrt{0}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \quad 0}{2} = \frac{2}{2} = \quad 1$$

$$x_3 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 + \sqrt{0}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 + 0}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Neste exemplo, as três raízes são iguais $x_1 = x_2 = x_3$, ou seja, –1 é raiz tripla. Portanto, o conjunto solução da equação $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$ é S = {–1}.

Em resumo, o processo de resolução de uma equação do 3º grau é iniciado a partir do valor de uma de suas raízes e, pelo dispositivo de Ruffini, obtém-se uma equação do 2º grau. Resolvendo essa equação, é possível determinar as demais raízes da equação inicial.

Série de raízes de um polinômio

Como vimos anteriormente, toda equação de grau *n* possui exatamente *n* raízes no universo dos números complexos, podendo ser desde todas com o mesmo valor até todas de valores diferentes entre si.

Como a indexação das raízes de uma equação depende da ordem em que elas são encontradas, e essa ordem pode mudar de acordo com o método usado para resolver a equação, a série numérica formada pelos valores de x_1 a x_n pode sofrer permutações, sem perda de significado.

Uma equação polinimial de grau $n \geq 2$ pode ser associada a mais de uma série de raízes, desde que a diferença entre elas seja apenas o resultado de permutações entre seus termos. Exemplos:

- a equação $x^3 - 9x^2 + 8x + 60 = 0$, cujo conjunto solução S = {–2, 5, 6}, possui três elementos e associam-se 3! = 6 possíveis séries (x_1, x_2, x_3) de raízes:

  (–2, 5, 6) (5, –2, 6) (6, –2, 5)
  (–2, 6, 5) (5, 6, –2) (6, 5, –2)

- a equação $2x^3 + 10x^2 + 14x + 6 = 0$, cujo conjunto solução S = {–1, –3} possui dois elementos e associam-se $\frac{3!}{2!} = 3$ possíveis séries (x_1, x_2, x_3) de raízes:

  (–1, –1, 3) (–1, 3, –1) (3, –1, –1)

- já a equação $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$, cujo conjunto solução S = { 1} é unitário e associa-se apenas uma série (x_1, x_2, x_3) de raízes:

  (–1,   1,   1)

Não havendo como prever qual permutação de (x_1, x_2, x_3) será encontrada resolvendo-se uma equação cúbica, perguntas a respeito das raízes costumam considerar expressões simétricas, ou seja, expressões cujo resultado não se altera pela mudança na ordem da série de raízes considerada. Exemplos:

- a soma das raízes: $x_1 + x_2 + x_3$;
- o produto das raízes: $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$;
- a soma dos produtos das raízes duas a duas: $x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3$.

Multiplicidade de uma raiz

Considere a série $r = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$, de raízes de uma equação polinomial de grau *n*. Quando entre os elementos da série há valores numéricos repetidos, dizemos que esses valores possuem **multiplicidade**. Assim, toda raiz x_p de uma equação polinomial está associada a uma multiplicidade m_p que indica a quantidade de vezes que o valor x_p aparece em alguma série de raízes da equação.

O grau de uma equação polinomial é sempre igual à soma das multiplicidades de suas soluções:
$n = m_1 + m_2 + \ldots + m_k$.

Se alguma raiz x_p, com $1 \leq p \leq n$, for única na série, ou seja, não houver nenhuma outra raiz x_q, com $p \neq q$, tal que $x_p = x_q$ então x_p é denominada **raiz simples** da equação e sua multiplicidade é $m = 1$.

Por exemplo, o conjunto solução da equação $x^3 \quad 9x^2 + 8x + 60 = 0$ é $S = \{\ 2, 5, 6\}$. Então:

- $x_1 = -2$ é raiz simples $(m_1 = 1)$
- $x_2 = 5$ é raiz simples $(m_2 = 1)$
- $x_3 = 6$ é raiz simples $(m_3 = 1)$

Se tivermos duas raízes x_p e x_q de mesmo valor com $p \neq q$, e esse valor for diferente de todos os demais, então x_p é denominada **raiz dupla** da equação e sua multiplicidade é $m = 2$.

Por exemplo, o conjunto solução da equação $2x^3 + 10x^2 + 14x + 6 = 0$ é $S = \{-1, -3\}$. Então:

- $x_1 = -1$ é raiz dupla $(m_1 = 2)$
- $x_2 = -3$ é raiz simples $(m_2 = 1)$

O conjunto solução da equação $x^3 + 7x^2 + 15x + 9 = 0$ é $S = \{-1, -3\}$ como o conjunto solução do exemplo anterior, mas, nesse caso, temos:

- $x_1 = -1$ é raiz simples $(m_1 = 1)$
- $x_2 = -3$ é raiz dupla $(m_2 = 2)$

Embora o conjunto solução das duas equações seja o mesmo, a soma das raízes não é. Observe:

- Na equação $2x^3 + 10x^2 + 14x + 6 = 0$ a soma das raízes é $x_1 + x_2 + x_3 = (\ 1) + (-1) + (\ 3) = -5$.
- Já na $x^3 + 7x^2 + 15x + 9 = 0$ esta soma é $x_1 + x_2 + x_3 = (\ 1) + (\ 3) + (\ 3) = \ 7$.

! Atenção

O conjunto solução da equação $x^3 + 7x^2 + 15x + 9 = 0$ é $S = \{-1, -3\}$. Como -3 é raiz dupla dessa equação, uma possível série de suas raízes é $r = (-1, -3, -3)$.

Observe que é importante saber diferenciar a solução de uma equação das raízes da equação, pois elas nem sempre são iguais.

Por exemplo ao perguntar "qual é a soma das soluções da equação?", o resultado é $(-1) + (-3) = -4$; já, perguntar "qual é a soma das raízes da equação?", o resultado é $(-1) + (-3) + (-3) = -7$.

Veja, na tabela a seguir, uma lista de equações quárticas (do 4º grau), com as diferentes possibilidades para as multiplicidades de suas raízes.

Equação	Conjunto solução	Denominações	Multiplicidades
$x^4 \quad 6x^3 + 11x^2 + 6x = 0$	$S = \{0, 1, 2, 3\}$	0 é raiz simples 1 é raiz simples 2 é raiz simples 3 é raiz simples	$m_1 = 1$ $m_2 = 1$ $m_3 = 1$ $m_4 = 1$
$x^4 \quad 2x^3 + 5x^2 \quad 8x + 4 = 0$	$S = \{1, 2i, \ 2i\}$	1 é raiz dupla 2i é raiz simples 2i é raiz simples	$m_1 = 2$ $m_2 = 1$ $m_3 = 1$
$x^4 - 10x^3 + 25x^2 = 0$	$S = \{0, 5\}$	0 é raiz dupla 5 é raiz dupla	$m_1 = 2$ $m_2 = 2$
$x^4 \quad 5x^3 = 0$	$S = \{0, 5\}$	0 é raiz tripla 5 é raiz simples	$m_1 = 3$ $m_2 = 1$
$x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 = 0$	$S = \{1\}$	1 é raiz quádrupla	$m_1 = 4$

Como consequência do teorema fundamental da Álgebra, do teorema da decomposição e do conceito de multiplicidade aqui expostos, tem-se que todas as equações polinomiais de grau *n* podem ser expressas de forma fatorada:

$$a_0 \cdot (x - x_1)^{m_1} \cdot (x - x_2)^{m_2} \cdot \ldots \cdot (x - x_k)^{m_k} = 0, \text{ com } a_0 \neq 0 \text{ e } k \leq n$$

Nesta representação, as soluções $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$ têm valores diferentes uns dos outros e a série de expoentes $(m_1, m_2, m_3, \ldots, m_k)$ é formada pelos números naturais que indicam as respectivas multiplicidades de cada solução da equação. Assim:

- m_1 é a multiplicidade de x_1;
- m_2 é a multiplicidade de x_2;

  ⋮
- m_k é a multiplicidade de x_k.

Não sendo necessário escrever repetidamente as raízes de multiplicidade $m > 1$, o conjunto solução da equação fica sendo $S = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k\}$.

Considere, por exemplo, a equação $x^3 + x^2 \quad 5x + 3 = 0$.

Observando que a soma dos coeficientes do polinômio $P(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$ é igual a 0, pode-se concluir que $x = 1$ é uma de suas raízes, ou seja, $P(1) = 0$.

$$P(1) = 1^3 + 1^2 - 5 \cdot 1 + 3 = 1 + 1 - 5 + 3 = 0$$

Aplicando o dispositivo de Ruffini, temos:

1	1	1	–5	3
	1	2	–3	0

Como a divisão de P(x) por (x – 1) gera quociente $Q(x) = x^2 + 2x - 3$ e resto nulo, do teorema de Descartes, tem-se: $P(x) = (x - 1) \cdot Q(x) + 0$.

Assim, a equação pode ser escrita com dois fatores, um do 1º e outro do 2º grau. Então:

$$(x \quad 1) \cdot (x^2 + 2x \quad 3) = 0$$

Do segundo fator, temos:

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16$$

$$x_{2,3} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm 4}{2} \begin{cases} x = 1 \\ \text{ou} \\ x = -3 \end{cases}$$

Usando a fórmula quadrática para obter as raízes do fator do 2º grau tem-se:

$$Q(x) = (x + 3) \cdot (x - 1)$$

Substituindo a forma fatorada do polinômio Q(x) na equação cúbica original, encontra-se:

$$(x + 1) \cdot (x + 3) \cdot (x - 1) = 0$$

Finalmente, usando a potenciação para abreviar a multiplicação dos fatores iguais, a equação pode ser representada por $(x + 3) \cdot (x \quad 1)^2 = 0$.

Lendo a equação nesse formato podemos concluir que 3 é raiz simples e 1 é raiz dupla da equação.

Equações polinomiais com coeficientes reais

Quando todos os coeficientes de uma equação polinomial são números reais, temos importantes relações entre o grau da equação e a existência de soluções reais.

> O número de raízes reais e o grau de uma equação polinomial têm sempre a mesma paridade.

Sendo $n \geq 1$ o grau de uma equação polinomial, temos duas situações distintas:

> Se *n* é **par**, a quantidade de raízes reais da equação também é par.
> Se *n* é **ímpar**, a quantidade de raízes reais da equação também é ímpar.

Como o número 1 é o menor natural ímpar, pode-se concluir que toda equação polinomial de grau ímpar possui pelo menos uma solução real. O teorema que veremos a seguir é o que garante todas estas afirmações.

Teorema das raízes complexas

> Se um número complexo $z = a + bi$ for raiz de uma equação polinomial de coeficientes reais, então seu conjugado $\bar{z} = a - bi$ também será raiz da mesma equação. Neste caso, as raízes z e $\bar{z}$ terão a mesma multiplicidade.

Como a igualdade $z = \bar{z}$ só ocorre quando z é um número real (b = 0), pode-se concluir deste teorema que o número de raízes não reais de uma equação polinomial de coeficientes reais é sempre par.

Saiba mais

Regra dos sinais de Descartes

Essa regra de sinais tem por finalidade verificar se uma equação polinomial, de coeficientes reais, possui alguma raiz real e positiva. Isso pode ser muito útil em atividades que envolvem Geometria.

A regra de Descartes considera a quantidade *t* de trocas de sinais, ou seja a quantidade de vezes que os sinais dos coeficientes se alternam, na série $(a_0, a_1, ..., a_n)$ dos coeficientes reais da equação.

De acordo com a regra, sendo *p* o número de raízes positivas de uma equação polinomial de grau *n* e coeficientes reais, tem-se primeiramente que $p \leq t \leq n$.

Além disso, o número de raízes positivas tem a mesma paridade que o número de mudanças de sinal na série de coeficientes da equação, ou seja:

- Se *t* é par, então *p* também é par;
- Se *t* é ímpar, então *p* também é ímpar.

Assim:

- Se $t = 0$, então $p = 0$, ou seja, a equação não possui raiz positiva.
- Se $t = 1$, então $p = 1$, ou seja, a equação possui 1 raiz positiva.
- Se $t = 2$, então $p \in \{0, 2\}$, ou seja, a equação pode possuir 2 raízes positivas ou nenhuma.
- Se $t = 3$, então $p \in \{1, 3\}$, ou seja, a equação pode possuir 1 ou 3 raízes positivas.
- $t = 4 \Rightarrow p \in \{0, 2, 4\}$ etc.
- $t = 5 \Rightarrow p \in \{1, 3, 5\}$ etc.

Veja os exemplos a seguir:

Equação	Série de coeficientes	Trocas de sinal	Número de raízes positivas
$4x^2 + 3x \quad 1 = 0$	(+4, +3, –1)	$t = 1$	1
$2x^3 + 6x^2 - 18x - 54 = 0$	(+2, +6, –18, –54)	$t = 1$	1
$x^3 - 6x^2 + 6x - 5 = 0$	(+1, –6, +6, –5)	$t = 3$	1 ou 3
$-x^3 + 8x^2 - 24 = 0$	(–1, +8, 0, –24)	$t = 2$	0 ou 2
$x^3 + 5x^2 + 7x + 3 = 0$	(+1, +5, +7, +3)	$t = 0$	Não possui
$x^3 \quad 3x^2 + 2x \quad 720 = 0$	(+1, –3, +2, –720)	$t = 3$	1 ou 3

De forma geral, para valores maiores de *t* é correto afirmar que:

- Se *t* é par, então $p \in \{0, 2, 4, ..., 2n\}$, $n \in \mathbb{N}$;
- Se *t* é ímpar, então $p \in \{1, 3, 5, ..., 2n - 1\}$, $n \in \mathbb{N}$.

Particularmente, se as raízes de uma equação $P(x) = 0$, de grau *n*, são todas positivas, então o número de trocas de sinais na série de coeficientes da equação é máximo: $t = n$. Nesse caso, os coeficientes da equação são alternadamente positivos e negativos.

Pesquisa de raízes racionais

A pesquisa de raízes racionais tem por objetivo verificar se uma equação polinomial de coeficientes inteiros possui raiz pertencente ao conjunto dos números racionais, ou seja, se existe uma fração de números inteiros que seja solução da equação.

Considere o polinômio P(x) de grau *n*, cujos coeficientes são números inteiros.

$$P(x) = a_0 \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot ... \cdot (x - x_n) \equiv a_0 \cdot x^n + a_1 \cdot x^{n-1} + ... + a_{n-1} \cdot x + a_n,\ a \neq 0$$

Calculando P(0), temos:

$$P(0) = a_0 \cdot (0 \quad x_1) \; (0 \quad x_2) \; ... = (0 \cdot \; x_n) + \; a_0 \; 0^n + a_1 + 0^{n-1} \cdot \; ... + \; a_{n-1} = 0 \cdot \; a_n \quad a_0 \cdot (\; x_1) \; (\; x_2) \; ... \; (\; x_n) \quad a_n$$

Como $a_0 \neq 0$, pode-se afirmar que o quociente $\frac{a_n}{a_0}$ é igual ao produto das raízes de um polinômio, com todos os seus sinais trocados. Portanto, o produto das raízes de um polinômio tem o mesmo valor absoluto do quociente entre seus coeficientes extremos.

$$|x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n| = \left|\frac{a_n}{a_0}\right|$$

Aqui, não há necessidade de se discutir os sinais das expressões em módulo, pois o que se está procurando não é o produto das raízes do polinômio, mas sim alguma dessas raízes. Saber o sinal de um produto não permite saber o sinal de nenhum dos fatores envolvidos.

Assim, se a equação $P(x) = 0$ possuir alguma raiz x_p com $1 \leq p \leq n$, pertencente ao conjunto dos números racionais, então deve haver um par de números inteiros N e $D > 0$, primos entre si, tais que:

$x_p = \frac{N}{D}$, sendo N divisor inteiro de a_n e D divisor positivo de a_0.

Então, do teorema fundamental da aritmética, tem se que o numerador e o denominados da fração x_p são, respectivamente, divisores do termo independente e do coeficiente principal da equação $P(x) = 0$.

Como os divisores de um número inteiro formam um conjunto finito, é possível determinar se alguma fração $\frac{N}{D}$, formada pelos divisores de a_n e a_0 é raiz da equação, por meio de tentativa e erro.

Atenção

Para efetuar corretamente a pesquisa das raízes racionais de uma equação polinomial, de coeficientes inteiros, é importante observar que a fração $\frac{a_n}{a_0}$ não deve ser simplificada.

Particularmente, quando em uma equação $P(x) = 0$ de coeficientes inteiros, o coeficiente principal do polinômio P é unitário ($a_0 = 1$), se houver alguma raiz racional, então essa raiz também será um número inteiro.

Considere, por exemplo, a equação $x^3 + x^2 + 4x + 4 = 0$.

O produto das três raízes dessa equação tem módulo igual a $\frac{4}{1}$. Então, sendo $x_1 = \frac{N}{D}$ uma possível raiz racional, é necessário que:

- N seja divisor inteiro de 4 $\therefore$ $N \in \{\pm1, \pm2, \pm4\}$.
- D seja divisor positivo de 1 $\therefore$ $D \in \{1\}$.

Como o único denominador possível é $D = 1$, se a equação possuir alguma raiz racional, então essa raiz será um número inteiro do conjunto $\{\pm1, \pm2, \pm4\}$.

Por tentativa e erro, podemos substituir esses valores em P(x) ou aplicar o dispositivo de Ruffini. Observe:

$P(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 + 4 \cdot (-1) + 4 = -1 + 1 - 4 + 4 = 0$, portanto, –1 é raiz.

Como –1 é raiz, aplicando o dispositivo de Ruffini, podemos determinar as demais raízes:

–1	1	1	4	4
	1	0	4	0

Veja outro exemplo.

- Considere a equação $x^3 - 6x^2 + 6x - 5 = 0$. Da pesquisa de raízes racionais, temos:

$$N \in \{\pm1, \pm5\} \text{ e } D \in \{1\} \backslash \frac{N}{D} \in \{\pm1, \pm5\}$$

Se a equação tiver alguma raiz racional, ela pertencerá ao conjunto $\{\pm1, \pm5\}$.

Então:

- Se $x = -1$: $P(-1) = (-1)^3 - 6 \cdot (-1)^2 + 6 \cdot (-1) - 5 =$
  $= -1 - 6 - 6 - 5 = -18$
  $\therefore$ –1 não é raiz.
- Se $x = 1$: $P(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 - 5 = 1 - 6 + 6 - 5 = -4$
  $\therefore$ 1 não é raiz.
- Se $x = -5$: $P(-5) = (-5)^3 - 6 \cdot (-5)^2 + 6 \cdot (-5) - 5$:
  = 125 ⫤150 30 5 310
  $\therefore$ –5 não é raiz.
- Se $x = 5$: $P(5) = 5^3 - 6 \cdot 5^2 + 6 \cdot 5 - 5 = 125 - 150 + 30 - 5 = 0$
  $\therefore$ 5 é raiz.

Também podemos testar as possíveis raízes utilizando o dispositivo de Ruffini.

Como vimos, o conjunto de candidatos à raiz racional da equação é $\{\pm1, \pm5\}$.

Pelo dispositivo de Ruffini temos:

1ª tentativa: $x_1 = 1$

1	1	–6	6	–5
	1	5	1	$4 \neq 0$

2ª tentativa: $x_1 = 1$

–1	1	–6	6	–5
	1	–7	13	$-18 \neq 0$

3ª tentativa: $x_1 = -5$

–5	1	–6	6	–5
	1	–11	61	$-310 \neq 0$

4ª tentativa: $x_1 = 5$

5	1	–6	6	–5
	1 1	1	0	

Como o resto da divisão é nulo, o número 5 é de fato raiz racional da equação.

É possível que, na pesquisa das raízes racionais, nenhuma raiz seja obtida. Isso significa que o polinômio em questão não possui nenhuma raiz racional.

Saiba mais

Se os coeficientes de uma equação polinomial forem números racionais não inteiros, a equação deve ser multiplicada pelo mínimo múltiplo comum dos denominadores de todos os coeficientes, a fim de se obter uma equação equivalente com coeficientes inteiros.

Pesquisa de raízes reais

Dada uma equação do tipo $P(x) = 0$, em que todos os coeficientes são números reais, e um intervalo real aberto $]x_A, x_B[$, existe uma maneira bem simples de verificar se a equação possui alguma raiz real pertencente ao intervalo dado. Para isso, basta verificar o sinal do produto $P(x_A) \cdot P(x_B)$.

De acordo com o teorema de Bolzano:

- Se $P(x_A) \cdot P(x_B) > 0$, então $P(x) = 0$ tem um número **par** de raízes reais no intervalo $]x_A, x_B[$.
- Se $P(x_A) \cdot P(x_B) < 0$, então $P(x) = 0$ tem um número **ímpar** de raízes reais no intervalo $]x_A, x_B[$.

O menor número par natural é 0 (zero). Por isso, quando $P(x_A) \cdot P(x_B)$ é positivo não há garantia de que a equação tenha alguma raiz real no intervalo considerado.

Mas como o menor número natural ímpar é 1, quando $P(x_A) \cdot P(x_B)$ é negativo, a equação certamente possui alguma raiz real no intervalo considerado.

Relações entre coeficientes e raízes

No início do século XVII o matemático francês Albert Girard descobriu uma maneira de relacionar os coeficientes de um polinômio aos valores de suas raízes complexas por meio de um sistema de equações não lineares. Essas equações permitem obter os resultados de diversas operações algébricas feitas com as raízes de uma equação polinomial, mesmo sem que sejam conhecidos os valores dessas raízes. Para isso, a sucessão de operações aplicadas às raízes da equação tem que ser comutativa, ou seja, seu resultado deve permanecer o mesmo quando a ordem das raízes é alterada.

Funções simétricas

Considere uma série de duas variáveis (x_1, x_2). Uma operação, ou combinação de operações, aplicada(s) a essas duas variáveis é uma função simétrica, se e somente se:

$$f(x_1, x_2) = f(x_2, x_1)$$

São exemplos de funções simétricas de duas variáveis as funções:

- soma: $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$.
- produto: $f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$.
- soma dos quadrados: $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$.
- soma dos inversos: $f(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$.

Entre as funções listadas acima, a soma e o produto são denominadas funções simétricas elementares e designadas por σ_1 (sigma 1) e σ_2 (sigma 2). Assim:

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 \text{ e } \sigma_2 = x_1 \cdot x_2$$

Note que os demais exemplos dados podem ser expressos pelas funções elementares:

$$x_1^2 + x_2^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 \text{ e } \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$$

Considere uma série de três variáveis: (x_1, x_2, x_3). Diz-se que f é uma função simétrica dessas variáveis, se e somente se:

$$f(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_3, x_2) = f(x_2, x_1, x_3) = f(x_2, x_3, x_1) = \\ = f(x_3, x_1, x_2) = f(x_3, x_2, x_1)$$

São exemplos de funções simétricas de três variáveis as funções:

- soma: $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3$;
- soma dos produtos dois a dois: $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3$;
- produto: $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$;
- soma dos quadrados: $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$;
- soma dos inversos: $f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$.

Neste caso, são denominadas funções simétricas elementares as funções soma, soma dos produtos dois a dois e produto e são designadas por σ_1 (sigma 1), σ_2 (sigma 2) e σ_3 (sigma 3). Assim:

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3$$
$$\sigma_2 = x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3$$
$$\sigma_3 = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$$

Os demais exemplos também podem ser expressos pelas funções elementares:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$$
$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{\sigma_2}{\sigma_3}$$

Observe que o número de variáveis coincide com o número de funções simétricas elementares definidas. Então, seguindo o padrão, sobre quatro variáveis complexas (x_1, x_2, x_3, x_4) definem-se também quatro funções simétricas elementares.

- soma: $\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$
- soma dos produtos dois a dois: $\sigma_2 = x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_4 + x_2 \cdot x_3 + x_3 \cdot x_4 + x_3 \cdot x_4$
- soma dos produtos três a três: $\sigma_3 = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 + x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 + x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$
- produto: $\sigma_4 = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$

De forma genérica, dada uma série $r = (x_1, x_2, x_3, x_4, ..., x_n)$ de números complexos, as *n* funções simétricas elementares são definidas por:

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + ... + x_n$$
$$\sigma_2 = x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_4 + ... + x_{n-2} \cdot x_{n-1} + x_{n-1} \cdot x_n$$
$$\sigma_3 = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 + x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 + ... + x_{n-2} \cdot x_{n-1} \cdot x_n$$
$$\sigma_4 = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 + ... + x_{n-3} \cdot x_{n-2} \cdot x_{n-1} \cdot x_n$$
$$\vdots$$
$$\sigma_n = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot ... \cdot x_{n-1} \cdot x_n$$

Relações de Girard

As relações definidas por Albert Girard tratam de igualdades estabelecidas entre os coeficientes e as funções simétricas elementares das raízes de uma equação polinomial. Usando as relações de Girard, toda equação de grau $n \geq 2$ é equivalente a um sistema de *n* equações simétricas fundamentais.

Em equações do 2º grau, as relações de Girard resumem-se às relações para a soma e o produto das raízes, vistas anteriormente ao falar de função quadrática.

Sendo $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, as funções simétricas fundamentais σ_1 e σ_2, das raízes x_1 e x_2 da equação, formam o sistema: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$.

! Atenção

É importante observar que tais relações continuam válidas mesmo que as raízes x_1 e x_2 sejam iguais.

Em equações do 3º grau, além da soma e do produto das raízes, há uma terceira relação que pode ser obtida: a soma dos produtos dois a dois.

Sendo $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, com $a \neq 0$, as funções simétricas fundamentais σ_1, σ_2 e σ_3 das raízes x_1, x_2 e x_3 da equação formam o sistema:

$$\begin{cases} \sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{b}{a} \\ \sigma_2 = x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 = \dfrac{c}{a} \\ \sigma_3 = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\dfrac{d}{a} \end{cases}$$

Já nas equações do 4º grau, há mais duas relações de Girard, além da soma e do produto, sendo uma para a soma dos produtos dois a dois e outra para a soma dos produtos três a três.

Sendo $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$, com $a \neq 0$, as funções simétricas fundamentais σ_1, σ_2, σ_3 e σ_4 das raízes x_1, x_2, x_3 e x_4 da equação formam o sistema:

$$\begin{cases} \sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\dfrac{b}{a} \\ \sigma_2 = x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_4 + x_2 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_4 + x_3 \cdot x_4 = \dfrac{c}{a} \\ \sigma_3 = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 + x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 + x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = -\dfrac{d}{a} \\ \sigma_4 = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = \dfrac{e}{a} \end{cases}$$

De um modo geral, considere $r = (x_1, x_2, x_3, x_4, ..., x_n)$ uma série das raízes complexas da equação $P(x) = 0$ de grau *n* e coeficiente complexos, em que:

$$P(x) = a_0 \cdot x^n + a_1 \cdot x^{n-1} + a_2 \cdot x^{n-2} + ... + a_{n-2} \cdot x^2 + a_{n-1} \cdot x + a_n, \quad a \neq 0$$

Para todo *k* inteiro tal que $1 \leq k \leq n$, de acordo com as relações de Girard, a função simétrica fundamental σ_k fica definida por $\sigma_k = (-1)^k \cdot \dfrac{a_k}{a_0}$.

Saiba mais

O número de parcelas de uma função simétrica fundamental σ_k das raízes complexas de uma equação polinomial de grau $n \geq k$ pode ser obtido por meio de análise combinatória, pois cada parcela é uma combinação diferente dos termos da série de raízes da equação. Assim, é correto afirmar que σ_k possui exatamente $C_{n,k}$ parcelas.

$$C_{n,k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Soma e produto

As duas relações extremas de cada sistema formado pelas relações de Girard têm maior aplicabilidade que as demais relações, na resolução de questões. Por isso, elas merecem atenção especial.

Assim, seja $r = (x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ uma série das raízes da equação $P(x) = 0$, em que:

$P(x) = a_0 \cdot x^n + a_1 \cdot x^{n-1} + a_2 \cdot x^{n-2} + ... + a_{n-2} \cdot x^2 + a_{n-1} \cdot x + a_n$, $a \neq 0$

Nessas condições tem-se que:

- A soma de todas as raízes da equação é dada por $\sigma_1 = -\dfrac{a_1}{a_0}$.
- O produto de todas as raízes da equação é dado por $\sigma_n = (-1)^n \cdot \dfrac{a_n}{a_0}$.

Revisando

1 Considere a equação polinomial e faça o que é pedido em cada item:

$$(x^3 - x)(x^2 - 2x + 1)(x^2 + 6x + 9) = 0$$

a) Reescrever a equação usando apenas fatores do 1º grau.

b) Escrever o conjunto solução da equação.

c) Determinar a multiplicidade de cada uma das raízes da equação.

d) Determinar o grau dessa equação.

2 Resolva a equação $x^4 - 7x^2 - 18 = 0$.

3 Resolva a equação $x^3 - 2x^2 - 6x - 8 = 0$ sabendo que 4 é uma de suas raízes.

4 Resolva a equação $x^5 - 16x^3 - 38x^2 - 33x - 10 = 0$, sabendo que o número –1 é raiz tripla.

5 **Ufes 2015** Considere o polinômio $f(x) = 3x^3 \quad 7x^2 + 8x \quad 2$.

a) Verifique se f(x) possui raízes inteiras. Justifique.

b) Verifique se f(x) possui raízes racionais não inteiras. Justifique.

c) Determine todas as raízes de f(x).

6 A raiz real da equação $3x^5 + 2x^4 + 3x + 2 = 0$ pertence ao intervalo:

A]–3, –2[

B]–2, –1[

C]–1, 0[

D]0, 1[

E [1, 2[

7 Se os números $1 - i$ e 3 são raízes simples de uma equação polinomial com coeficientes reais, e o número $3i$ é raiz dupla da mesma equação, então o menor grau que essa equação pode ter é:

A 3
B 4
C 5
D 6
E 7

8 Sendo *r*, *s* e *t* as três soluções da equação polinomial $5x^3 - 4x^2 - 3x + 2$, determine:

a) $r + s + t$
b) $rs + rt + st$
c) rst
d) $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} + \frac{1}{t}$
e) $r^2 + s^2 + t^2$

9 **Unicamp** Sejam r, s e t as raízes do polinômio $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + \left(\frac{b}{a}\right)^3$, em que a e b são constantes reais não nulas. Se $s^2 = rt$, então a soma $r + t$ é igual a:

A $\frac{b}{a} + a$
B $\frac{b}{a} \quad a$
C $a - \frac{b}{a}$
D $\frac{b}{a} - a$
E $\frac{b}{a} \quad a$

10 **UFMS** Sabe-se que o polinômio P(x) de coeficientes reais, definido a seguir, tem duas raízes reais opostas e que $P(1 + i) = 0$.

$$P(x) = 9x^4 + ax^3 + bx^2 + cx - 90$$

Então, qual é o valor de $(a + b + c)$?

Exercícios propostos

1 A diferença entre as duas maiores soluções da equação $x^3 \quad 14x^2 + 40x = 0$ é:

A 10.
B 8.
C 6.
D 4.
E 2.

2 A quantidade de raízes positivas da equação $x^3 + x^2 - 5x - 5 = 0$ é

A 0.
B 1.
C 2.
D 3.

3 A medida do maior lado do triângulo cujos vértices são as soluções da equação $x^3 + x^2 + x = 0$ é:

A 1 u.
B 2 u.
C $\sqrt{2}$ u.
D $\sqrt{3}$ u.
E 2 u.

4 **UFSM (Adapt.)** Para embalar 1 pastel folheado, é utilizada uma folha retangular de papel celofane cujas dimensões, em cm, são as raízes reais positivas do polinômio $P(x) = x^3 - 12x^2 + 20x + 96$. Sabendo que o preço de 1 m^2 de papel celofane é R$ 10,00, determine o custo para embalar 1000 pastéis folheados.

A R$ 12,00
B R$ 24,00
C R$ 36,00
D R$ 48,00
E R$ 60,00

5 **UEG 2020** As raízes do polinômio $P(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$ são

A $2, -i$ e i
B $2, -1$ e 1
C $-2, -i$ e i
D $-2, 1 - i$ e $1 + i$
E $2, 1 - i$ e $1 + i$

6 Quantas são as raízes racionais da equação polinomial $3x^4 - 11x^3 + 9x^2 - 11x + 6 = 0$?

A 0 B 1 C 2 D 3 E 4

7 **UFSM 2015** Para avaliar as vendas em 2013, o setor de planejamento de uma empresa utilizou a função polinomial $N(t) = t^3 - 21t^2 + 126t + 304$, em que N representa o número de tablets vendidos no mês *t* com $t = 1$ correspondendo a janeiro, $t = 2$ correspondendo a fevereiro e assim por diante. De acordo com os dados, o número de tablets vendidos foi igual a 480, nos meses de

A fevereiro, julho e novembro.
B fevereiro, agosto e novembro.
C fevereiro, agosto e dezembro.
D março, agosto e dezembro.
E março, setembro e dezembro.

8 **UFSM 2015** A pesquisa Retratos da Leitura no Brasil aponta que o porcentual de brasileiros considerados leitores vem diminuindo nos últimos anos. Suponha que a função polinomial $f(t) = \frac{t^3}{72} + \frac{17t^2}{72} \quad \frac{t}{12} \quad 56$ represente o porcentual de leitores de 2005 a 2020, com $t = 0$ correspondendo a 2005, $t = 1$ correspondendo a 2006 e assim por diante. Qual é o resto da divisão euclidiana de f(t) por $(t \quad 6)$?

A 47,5
B 48,5
C 50
D 51
E 54

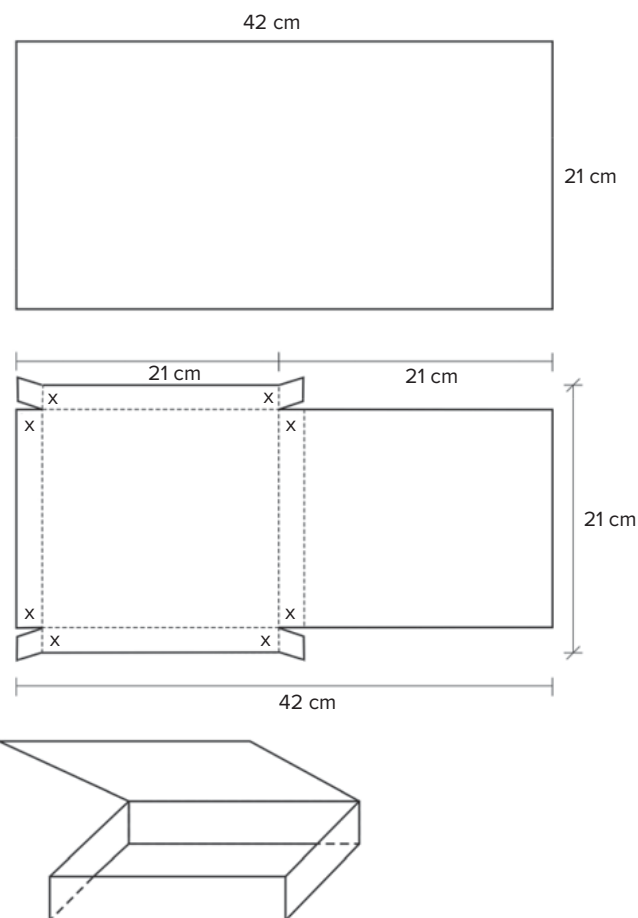
9 **UFSM 2014** A função $f(t) = \frac{1}{4}t^3 \quad 4t^2 + 17t \quad 20$ representa o lucro de uma empresa de produtos eletrônicos (em milhões de reais), no tempo *t* (em anos). Se t_1, t_2 e t_3, com $t_1 < t_2 < t_3$, correspondem aos anos em que o lucro da empresa é zero, então $t_3 - t_2 - t_1$ é igual a

A 1.
B 2.
C 4.
D 6.
E 10.

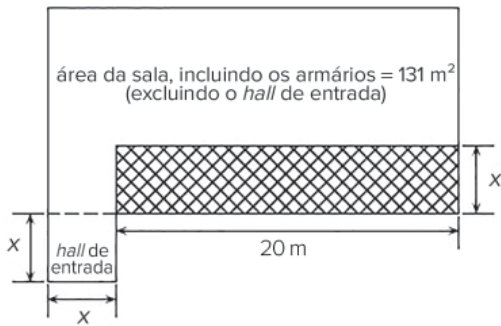
10 **UFSM 2012 (Adapt.)** A figura a seguir mostra a Vênus de Milo, atualmente exposta no museu do Louvre em Paris. Cópias dessa famosa estátua são encontradas em diversos locais.

Considere, então, que uma empresa produz cópias em gesso, em diferentes tamanhos, da Vênus de Milo. O tempo *t*, em horas, que cada cópia leva para secar depende da sua altura *h*, em centímetros. Sabe-se que a razão entre *t* e *h* é igual à raiz positiva do polinômio $P(x) = x^3 \quad 3x^2 \quad 29x \quad 33$. Considerando a aproximação $\sqrt{5} = 2{,}25$, uma cópia da Vênus de Milo, com altura de 100 cm, leva para secar

A 250 horas.
B 500 horas.
C 750 horas.
D 1000 horas.
E 2250 horas.

11 **UFPB** Uma organização não governamental desenvolveu um projeto de reciclagem de papel em um bairro popular de uma cidade, com o objetivo de contribuir com a política ambiental e gerar renda para as famílias carentes do bairro. A partir da catação do papel e utilizando um processo artesanal, as famílias produzem folhas de papelão em formato retangular medindo 21 cm × 42 cm. Um empresário local propôs comprar toda a produção mensal da comunidade para produzir caixas de papelão, em formato de paralelepípedo reto-retângulo, com volume igual a 810 cm^3. Cada caixa é construída recortando-se quadrados em dois dos vértices da folha e retângulos nos outros dois vértices. Em seguida, as abas resultantes dos recortes são dobradas nas linhas tracejadas na folha, obtendo-se dessa forma a caixa, conforme representação nas figuras abaixo.

Considerando que uma possibilidade para a medida *x* do lado do quadrado a ser recortado é 3 cm, é correto afirmar que outro valor possível, em centímetros, para a medida *x*, pertence ao intervalo:

A (1, 3)
B (3, 5)
C (5, 7)
D (7, 9)
E (9, 11)

12 **Insper 2013** A figura, feita fora de escala, representa a planta de uma sala de aula, que conta com uma área para armários dos alunos (parte hachurada).

A sala está sendo projetada de modo que o teto fique a uma distância de *x* metros do chão e, para que haja uma ventilação adequada, o volume total da sala mais o *hall* de entrada, descontando-se o espaço dos armários (que vão até o teto), deve ser de 280 m^3. O menor valor de *x* que atende a todas essas condições é

A 5.
B 6.
C 7.
D 8.
E 9.

13 Se o número 2 é raiz de multiplicidade 3 da equação $x^5 - 8x^4 + 26x^3 - 44x^2 + 40x - 16 = 0$, então o conjunto solução da equação, em $\mathbb{C}$, é

A $S = \{2, -1 - i, -1 + i\}$
B $S = \{-2, 1 - i, 1 + i\}$
C $S = \{-2, -1 - i, -1 + i\}$
D $S = \{2, 1 - i, 1 + i\}$
E $S = \{2, -i, +i\}$.

14 **FGV-SP 2018** Quantos números inteiros não negativos satisfazem a inequação $x^3 + 4x^2 + x - 6 \leq 0$?

A 2
B infinitos
C 5
D 3
E 4

15 **PUC-SP** Sabe-se que a equação polinomial $x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0$ admite raízes inteiras. Se *m* é a maior das raízes não inteiras dessa equação, então o valor de $m + \frac{1}{m}$ é:

A -6
B -3
C 0
D $\sqrt{5}$
E $2\sqrt{5}$

16 **Unicamp 2020** Sabendo que *a* é um número real, considere a equação quadrática $2x^2 + ax + 10 = 0$. Se as soluções dessa equação são números inteiros, o módulo da soma das soluções é igual a

A 3.
B 4.
C 5.
D 6.

17 **Unesp 2013** A equação polinomial $x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = 0$ admite 1 como raiz. Suas outras raízes são:

A $(1 + i\sqrt{3})$ e $(1 - i\sqrt{3})$.
B $(1 + i)$ e $(1 - i)$.
C $(2 + i)$ e $(2 - i)$.
D $(-1 + i)$ e $(-1 - i)$.
E $(-1 + i\sqrt{3})$ e $(-1 - i\sqrt{3})$.

18 **UFRN** A respeito do polinômio $P(x) = x^3 - 4x^2 + 2x - 1$, é correto afirmar:

A É divisível por $(x - 1)$.
B Possui uma raiz real.
C O produto de suas raízes é igual a 2.
D Deixa resto -5 quando dividido por $(x + 2)$.

19 **Ifal 2018 (Adapt.)** Sabe-se que $(1 - i)$ é uma das raízes complexas de $x^3 - 4x^2 + 6x - 4 = 0$. Podemos dizer que essa equação

A tem apenas 1 como raiz real.
B tem apenas 2 como raiz real.
C tem 1 e 2 como raízes reais.
D tem -1 e -2 como raízes reais.
E não tem raízes reais.

20 **PUC RJ 2018** A soma das raízes da equação $x^3 \quad 2x^2 \quad 6x = 0$ vale:

A 0
B 1
C 2
D 4
E 9

21 **Fuvest** Sabe-se que o produto de duas raízes da equação algébrica $2x^3 \quad x^2 + kx + 4 = 0$ é igual a 1. Então, o valor de k é:

A -8
B -4
C 0
D 4
E 8

22 **UEPG 2018** Sabendo que -2, 1, a e b são as soluções da equação $x^4 - x^3 + 6x^2 + 14x - 20 = 0$, assinale o que for correto.

01 A soma das raízes é um número ímpar.
02 O produto das raízes é um número negativo.
04 $a + b$ é um número real menor que zero.
08 $a \cdot b$ é um número real.
16 O módulo de a é três.

Soma:

23 Uerj Os zeros do polinômio a seguir formam uma P.A.

$$P(x) = x^3 - 12x^2 + 44x - 48$$

O conjunto solução da equação P(x) = 0 pode ser descrito por:

A {0, 4, 8}
B {2, 4, 6}
C {–1, 4, 9}
D {–2, –4, –6}

24 Unesp 2012 Dado que as raízes da equação $x^3 - 3x^2 - x + k = 0$, onde *k* é uma constante real, formam uma progressão aritmética, o valor de *k* é:

A –5
B –3
C 0
D 3
E 5

25 FGV-SP 2018 A equação polinomial na incógnita *x*, $x^3 - 21x^2 + kx - 315 = 0$ tem suas raízes em progressão aritmética.

Podemos concluir que o valor de *k* é:

A 162
B 143
C 201
D 157
E 131

26 Cefet-RJ Entre as equações abaixo, a que tem o número complexo 2 + 3i como uma de suas raízes é:

A $x^2 + 13x + 1 = 0$
B $x^2 - 4x - 5 = 0$
C $x^3 - 4x^2 + 13x = 0$
D $x^4 + 81 = 0$
E $x^4 + x^2 + 13 = 0$

27 UEG João gosta de brincar com números e fazer operações com eles. Em determinado momento, ele pensou em três números naturais e, em relação a esses números, observou o seguinte:

- a soma desses números é 7;
- o produto deles é 8;
- a soma das três parcelas resultantes dos produtos desses números tomados dois a dois é 14.

Assim, os três números pensados por João são raízes da equação

A $x^3 \quad 7x^2 + 14x \quad 8 = 0$
B $x^3 + 7x^2 \quad 14x + 8 = 0$
C $x^3 \quad 7x^2 \quad 14x \quad 8 = 0$
D $x^3 + 7x^2 \quad 14x \quad 8 = 0$

28 Uece 2015 As medidas das arestas de um paralelepípedo reto, em metros, são as raízes da equação $x^3 \quad 5x^2 + 8x + t = 0$, onde *t* é um número real. A medida da diagonal desse paralelepípedo é

A 6 m
B 8 m
C 3 m
D 5 m

29 Mackenzie 2013 Se α, β, e γ são as raízes da equação $x^3 + x^2 + px + q = 0$, onde *p* e *q* são coeficientes reais e α = 1 – 2i é uma das raízes dessa equação, então $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma$ é igual a:

A 15
B 9
C –15
D –12
E –9

30 Fuvest 2017 O polinômio $P(x) = x^3 - 3x^2 + 7x - 5$ possui uma raiz complexa ξ cuja parte imaginária é positiva. A parte real de ξ^3 é igual a

A –11
B –7
C 9
D 10
E 12

31 Unifesp 2009 Considere o polinômio $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, sabendo que *a*, *b* e *c* são números reais e que o número 1 e o número complexo 1 + 2i são raízes de p, isto é, que p(1) = p(1 + 2i) = 0.

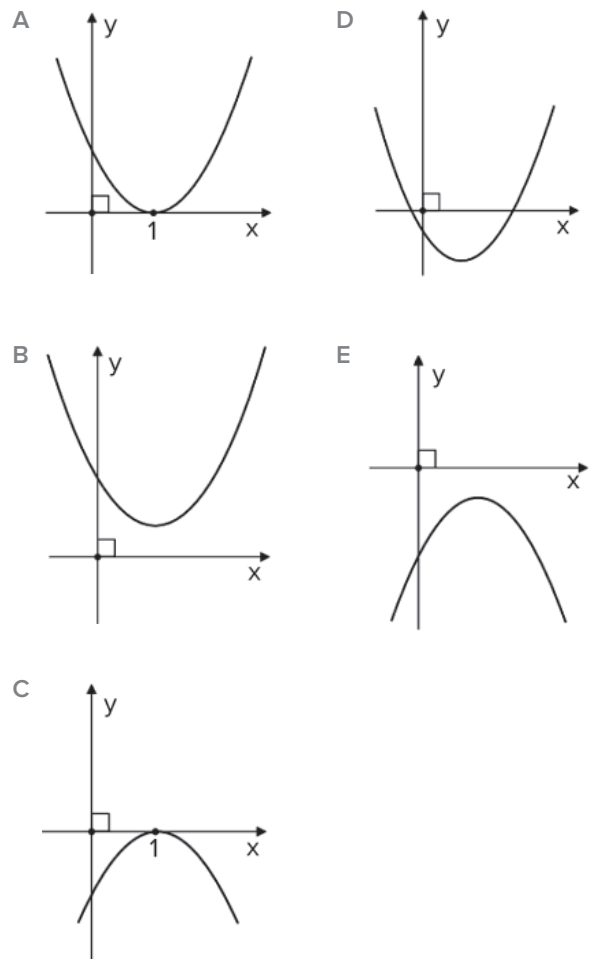
Nestas condições existe um polinômio q(x) para o qual $p(x) = (1 - x) \cdot q(x)$. Uma possível configuração para o gráfico de y = q(x) é:

A

D

B

E

C

32 **Unicamp 2016** Considere o polinômio cúbico $p(x) = x^3 + x^2 - ax - 3$ onde **a** é um número real. Sabendo que r e –r são raízes reais de p(x) podemos afirmar que p(1) é igual a

A 3
B 1
C –2
D –4

33 Os valores de *a* e *b* para que a equação $x^3 - 9x^2 + ax + b = 0$ admita uma raiz de multiplicidade 3 são, respectivamente:

A 27 e 27
B 27 e –27
C –27 e 27
D 27 e 27

34 **Unicamp 2015** Considere o polinômio $p(x) = x^3 - x^2 + ax - a$, onde *a* é um número real. Se $x = 1$ é a única raiz real de p(x) então podemos afirmar que

A $a < 0$
B $a < 1$
C $a > 0$
D $a > 1$

35 **Unesp 2014** Sabe-se que, na equação $x^3 + 4x^2 + x \quad 6 = 0$, uma das raízes é igual à soma das outras duas. O conjunto solução (S) desta equação é:

A $S = \{-3, -2, -1\}$
B $S = \{-3, -2, +1\}$
C $S = \{+1, +2, +3\}$
D $S = \{-1, +2, +3\}$
E $S = \{-2, +1, +3\}$

36 **Unicamp 2019** Sabendo que *a* e *b* são números reais, considere o polinômio cúbico $p(x) = x^3 + ax^2 + x + b$. Se a soma e o produto de duas de suas raízes são iguais a –1 então p(1) é igual a

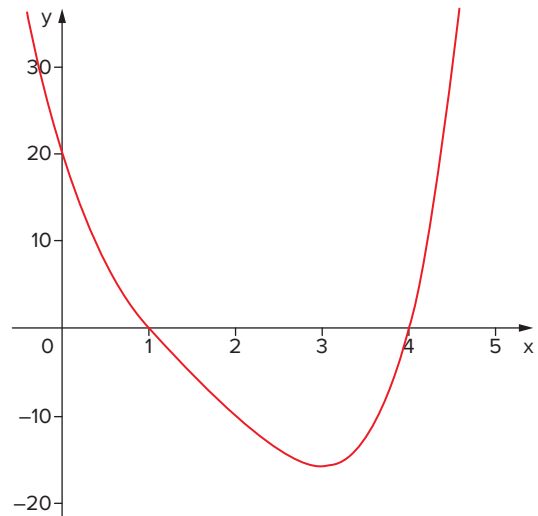
A 0
B 1
C 2
D 3

37 **Fuvest 2018** Considere o polinômio $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ em que $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$. Sabe-se que as suas *n* raízes estão sobre a circunferência unitária e que $a_0 < 0$.
O produto das *n* raízes de P(x) para qualquer inteiro $n \geq 1$ é:

A –1
B i^n
C i^{n+1}
D $(-1)^n$
E $(-1)^{n+1}$

38 Sendo *a*, *b* e *c* números reais diferentes de zero, considere as parábolas $y_1 = ax^2 + bx + c$ e $y_2 = cx^2 + bx + a$. Se os zeros da parábola y_1 são os números 1 e $2+\sqrt{3}$ então os zeros da parábola y_2 devem ser os números:

A 1 e $2-\sqrt{3}$
B –1 e $-2-\sqrt{3}$
C –1 e 2 $\sqrt{3}$
D 1 e $2+\sqrt{3}$
E 1 e $2+\sqrt{3}$

39 A figura a seguir apresenta o gráfico do polinômio $P(x) = x^4 - 7x^3 + 19x^2 - 33x + 20$, em um sistema cartesiano cuja unidade do eixo das ordenadas (Oy) é a décima parte da unidade do eixo abscissas (Ox).

O módulo das raízes complexas desse polinômio é igual a:

A 5
B 17
C $2\sqrt{2}$
D $\sqrt{17}$
E $\sqrt{5}$

40 **AFA 2019** Considere $a \in \mathbb{R}$ e os polinômios $P(x) = \frac{a}{2}x^6 - 26x^3 - 27$ e $A(x) = 2x^2 + 4x + a$, tais que seus gráficos se intersectam em um único ponto de ordenada nula.
Sabendo também que, graficamente, A(x) tangencia o eixo $\overleftrightarrow{Ox}$, analise as afirmativas abaixo e escreva V para verdadeira e F para falsa.

( ) O gráfico de P(x) corta o eixo $\overleftrightarrow{Ox}$ em dois pontos.
( ) Os afixos das raízes de P(x) que possuem menor módulo formam um triângulo cujo perímetro mede $3\sqrt{3}$ unidades de comprimento.
( ) A soma das raízes imaginárias de P(x) é igual a –2.

A sequência correta é

A V – V – V
B V – F – F
C F – V – F
D F – V – V

Texto complementar

Equações recíprocas

Considere uma equação polinomial de coeficientes reais:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n = 0,\ a_0 \neq 0$$

Esta equação é chamada de recíproca em dois casos:

I. Quando a série de seus coeficientes coincide com a mesma série lida na ordem contrária.

$$(a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n) = (a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_2, a_1, a_0)$$

Neste caso, tem-se que $a_k = a_{n-k}$, para todo *k* natural tal que $k \leq n$.

Equações com essa característica são denominadas recíprocas de 1ª espécie.

II. Quando a série de seus coeficientes e a série contrária são opostas, uma da outra.

$$(a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n) = (-a_n, -a_{n-1}, -a_{n-2}, \dots, -a_2, -a_1, -a_0)$$

Neste caso, tem-se que $a_k + a_{n-k} = 0$, para todo *k* natural tal que $k \leq n$.

Equações com essa característica são denominadas recíprocas de 2ª espécie.

Técnicas de resolução de equações recíprocas

Quando o grau de uma equação recíproca é ímpar tem-se que:

- $x_1 = -1$ é raiz da equação se ela for de 1ª espécie;
- $x_1 = +1$ é raiz da equação se ela for de 2ª espécie.

Quando o grau de uma equação recíproca é par tem-se que:

- $x_1 = +1$ é raiz da equação se ela for de 2ª espécie.

Nesses casos, podemos aplicar o dispositivo de Ruffini para encontrar uma equação de grau menor que possua as demais raízes da equação original. Sendo assim, só é necessário estudar processos para resolver as equações recíprocas de 1ª espécie cujo grau é par. O processo a seguir serve para resolver as de 4º grau.

Toda equação de 4º grau, que for recíproca e de 1ª espécie, pode ser representada por:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0,\ a \neq 0$$

Como $x = 0$ não é solução dessa equação, podemos dividir todos os seus termos por x^2 obtendo:

$$\frac{ax^4}{x^2} + \frac{bx^3}{x^2} + \frac{cx^2}{x^2} + \frac{bx}{x^2} + \frac{a}{x^2} = 0$$

Simplificando os termos da equação, ficamos com: $ax^2 + bx + c + \frac{b}{x} + \frac{a}{x^2} = 0$.

Reorganizando esses termos, vem: $ax^2 + \frac{a}{x^2} + bx + \frac{b}{x} + c = 0$.

Colocando os coeficientes **a** e **b** em evidência: $a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0$.

A atribuição $x + \frac{1}{x} = y$ implica:

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = y^2 \Leftrightarrow x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = y^2 \Leftrightarrow x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = y^2 \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$$

Então, fazendo a mudança de variável temos: $a(y^2 - 2) + by + c = 0$.

Na forma geral essa equação fica expressa por: $ay^2 + by + (c - 2a) = 0$.

A partir desse ponto, podemos usar a fórmula quadrática para encontrar os valores de *y* e, depois disso, bastará resolver as equações $x + \frac{1}{x} = y_1$ e $x + \frac{1}{x} = y_2$.

Observe a resolução do exemplo com a equação $2x^4 + x^3 - 11x^2 + x + 2 = 0$.

Dividindo a equação por x^2, temos: $\frac{2x^4}{x^2} + \frac{x^3}{x^2} - \frac{11x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2} + \frac{2}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + x - 11 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} = 0$.

Reorganizando os termos: $2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(x + \frac{1}{x}\right) - 11 = 0$.

Fazendo $x + \frac{1}{x} = y$, obtemos a equação: $2(y^2 - 2) + y - 11 = 0 \Leftrightarrow 2y^2 + y - 15 = 0$.

Então, da fórmula quadrática:

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-15) = 1 + 120 = 121 \quad \text{e} \quad y = \frac{-1 \pm \sqrt{121}}{2 \cdot 2} = \frac{-1 \pm 11}{4} \begin{cases} \nearrow y_1 = \frac{5}{2} \\ \searrow y_2 = -3 \end{cases}$$

Agora, voltando para variável *x* temos duas equações para resolver:

- $x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{x^2 + 1}{x} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 2x^2 + 2 = 5x \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0$

Assim: $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 25 - 16 = 9$ e $x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = \frac{5 \pm 3}{4} \begin{cases} \nearrow x_1 = 2 \\ \searrow x_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$.

- $x + \frac{1}{x} = -3 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 1}{x} = -3 \Leftrightarrow x^2 + 1 = -3x \Leftrightarrow x^2 + 3x + 1 = 0$

Assim: $\Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 9 - 4 = 5$ e $x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2} \begin{cases} \nearrow x_3 = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2} \\ \searrow x_4 = \frac{3 \quad \sqrt{5}}{2} \end{cases}$.

Portanto, o conjunto solução da equação é $S = \left\{ \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}, \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2}, 2 \right\}$.

Resumindo

Teorema fundamental da Álgebra (TFA)

Toda equação polinomial de grau $n \geq 1$ possui ao menos uma solução no conjunto dos números complexos.

$$\forall P(x) \mid gr(P) \geq 1 \Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{C} \mid P(\alpha) = 0$$

Todo polinômio de grau $n \geq 1$ possui exatamente *n* raízes complexas.

Grau da equação e multiplicidade das raízes

O grau de uma equação polinomial é sempre igual à soma das multiplicidades de suas raízes.

Pesquisa de raízes racionais

Se x_1 é uma raiz racional da equação $P(x) = 0$, então $x_1 = \frac{N}{D}$, em que N e D são números inteiros, primos entre si, que satisfaçam:

- N é necessariamente divisor do termo independente de P.
- D é necessariamente divisor do coeficiente principal de P.

Pesquisa de raízes reais

Uma equação $P(x) = 0$, de coeficientes reais, possui raiz real em um dado intervalo aberto $]x_A, x_B[$ sempre que $P(a) \cdot P(b) < 0$.

Raízes complexas

Se um número complexo $z = a + bi$ for raiz de uma equação polinomial de coeficientes reais, então o seu conjugado $\overline{z} = a - bi$ também será raiz da equação. Não sendo números reais, as raízes z e $\overline{z}$ terão a mesma multiplicidade.

Relações de Girard

- **2º grau:**

Se x_1 e x_2 são as raízes de $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, então: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$.

- **3º grau:**

Se x_1, x_2 e x_3 são as raízes de $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, com $a \neq 0$, então: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 = \frac{c}{a} \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = \frac{d}{a} \end{cases}$.

- **4º grau:**
  Se x_1, x_2, x_3 e x_4 são as raízes de $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$, com $a \neq 0$, então:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_4 + x_2 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_4 + x_3 \cdot x_4 = \dfrac{c}{a} \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 + x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 + x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = \dfrac{d}{a} \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = \dfrac{e}{a} \end{cases}$$

Quer saber mais?

Livro

GARBI, Gilberto Geraldo. *O romance das equações algébricas*. São Paulo: Livraria da Física, 2007.

Site

- Faça um passeio histórico pelas resoluções de equações algébricas de graus 2 e 3.
  Disponível em: <https://www.revista.vestibular.uerj.br/artigo/artigo.php?seq_artigo=8>.
- O *software* disponível nesse *site* ilustra um processo de otimização utilizando polinômios do 2º grau. Considera uma situação hipotética que objetiva encontrar a janela retangular que tem a maior área dentre as que têm um determinado formato e perímetro fixo. As funções que descrevem essas situações são polinômios do 2º grau com domínio restrito.
  Disponível em: <https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1243>.

Exercícios complementares

1 Se $P(x) = x^3 \quad 4x^2 \quad 17x + k$, com $k \in \mathbb{R}$, é divisível por $(x \quad 3)$, determine:

a) O valor de *k*.

b) O conjunto solução da equação $P(x) = 0$.

2 **Unirio** Considere a equação $x^3 + 4x^2 - 5x + k = 0$.

a) Qual é o valor de *k* para que se tenha $x = 2$ como raiz desta equação?

b) Com o valor de *k* encontrado no item anterior, ache todas as raízes da equação.

3 **Uerj** O retângulo de ouro é utilizado em Arquitetura desde a Grécia Antiga.
A razão entre as medidas do maior e do menor lado desse retângulo é o número de ouro, representado por φ.

a) Sabendo que φ é uma das raízes da equação $x^2 = x + 1$, calcule o valor de φ.

b) Observe as implicações abaixo.

$$\varphi^2 = \varphi + 1 \Rightarrow \begin{cases} \varphi^3 = \varphi^2 + \varphi \Rightarrow \varphi^3 = 2\varphi + 1 \\ \varphi^4 = \varphi^3 + \varphi^2 \Rightarrow \varphi^4 = 3\varphi + 2 \end{cases}$$

Determine todas as raízes complexas da equação $x^4 = 3x + 2$.

4 **UFF** A equação $-x^4 + 11x^3 - 38x^2 + 52x - 24 = 0$ tem duas de suas raízes iguais a 2.
Dadas as funções reais f e g definidas, respectivamente, por $f(x) = -x^4 + 11x^3 - 38x^2 + 52x - 24$ e $g(x) = \log(f(x))$, determine o domínio de g.

5 **Uerj**

$$x^3 + x + 10 = 0$$
$$x^3 - 19x - 30 = 0$$

As equações acima, em que $x \in \mathbb{C}$, têm uma raiz comum. Determine todas as raízes não comuns.

6 Uma das raízes da equação $x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 29x - 30 = 0$ é o número complexo $(2 - i)$. As outras raízes da equação são:

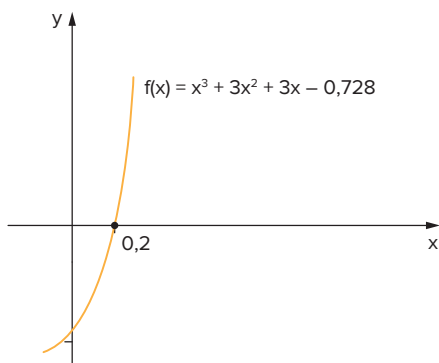
A $2 - i, -3$ e 2
B $2 + i, 3$ e -2
C -3 e 2
D $2 + i, -3$ e 2
E -2 e 3

7 **Uerj** As dimensões de um paralelepípedo retângulo são dadas pelas raízes do polinômio a seguir.

$$3x^3 - 13x^2 + 7x - 1$$

Em relação a esse paralelepípedo, determine:
a) a razão entre a sua área total e o seu volume;
b) suas dimensões.

8 **Fuvest** As raízes da equação de terceiro grau $x^3 - 14x^2 + kx - 64 = 0$ são todas reais e formam uma progressão geométrica. Determine:
a) as raízes da equação;
b) o valor de k.

9 **FGV 2013** A editora FGV aplicou o lucro obtido em 2011, R$ 100.000,00 em um fundo de renda fixa, a certa taxa de juro composta. Após 3 anos, deve receber um montante de R$ 172.800,00.
a) A que taxa de juro anual aplicou seu dinheiro? Use as informações do gráfico abaixo para justificar a sua resposta.

b) Qual é a soma das duas raízes complexas da equação $x^3 + 3x^2 + 3x - 0{,}728 = 0$ que não são números reais?

10 Uma empresa produz recipientes em forma de paralelepípedos de altura x. Os polinômios a seguir expressam, em função de x, a área da superfície interna dos recipientes e seus respectivos volumes, para $0 < x < 5$.

$$A(x) = 120 - 4x^2$$
$$V(x) = 120x - 44x^2 + 4x^3$$

De acordo com essas funções, determine:
a) A altura e o volume de um recipiente com área interna igual a 116.
b) Determine a maior altura que um recipiente de volume igual a 80 pode ter.
c) Qual é a altura do recipiente de menor área entre os recipientes cujo volume é igual a 80?

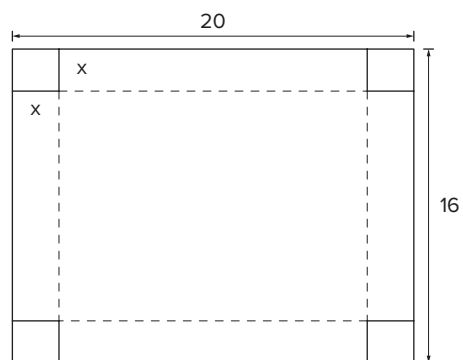
Justifique suas respostas.

11 **Unicamp 2016** Considere o polinômio cúbico $P(x) = x^3 - 3x + a$, onde a é um número real.
a) No caso em que $P(1) = 0$, determine os valores de x para os quais a matriz A abaixo não é invertível.

$$A = \begin{bmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ a & 3 & x \end{bmatrix}$$

b) Seja b um número real não nulo e i a unidade imaginária, isto é, $i^2 = -1$. Se o número complexo $z = 2 + bi$ é uma raiz de p(x), determine o valor de $|z|$.

12 Considere o polinômio $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 8x - 15$ e faça o que se pede em cada item:
a) mostre que a equação $P(x) = 0$ admite pelo menos uma raiz real no intervalo entre os números 2 e 3.
b) decida se essa ou essas raízes são racionais ou irracionais e justifique sua resposta.

13 **Fuvest 2017** Considere uma folha de papel retangular com lados 20 cm e 16 cm. Após remover um quadrado de lado x cm de cada um dos cantos da folha, foram feitas 4 dobras para construir uma caixa (sem tampa) em forma de paralelepípedo reto-retângulo com altura x cm. As linhas tracejadas na figura indicam onde as dobras foram feitas.

a) Expresse o volume da caixa em função de x.
b) Determine o conjunto dos valores de x para os quais o volume da caixa é maior ou igual a 384 cm^3.

14 Sabendo-se que o número complexo $3 + 2i$ é a raiz do polinômio $x^3 + px^2 + qx - 13$, em que p e q são números reais, conclui-se que $p + q$ é igual a

A -26.
B -12.
C 12.
D 13.
E 26

15 **ITA** Sabe-se que o polinômio $p(x) = x^5 - ax^3 + ax^2 - 1$, $a \in \mathbb{R}$, admite a raiz $-i$.

Considere as seguintes afirmações sobre as raízes de p:

I. Quatro das raízes são imaginárias puras.

II. Uma das raízes tem multiplicidade dois.

III. Apenas uma das raízes e real.

Destas, é (são) verdadeira(s) apenas

A I.

B II.

C III.

D I e III.

E II e III.

16 **ITA** Se 1 é uma raiz de multiplicidade 2 da equação $x^4 + x^2 + ax + b = 0$, com $a, b \in \mathbb{R}$, então $a^2 - b^3$ é igual a:

A −64

B −36

C −28

D 18

E 27

17 **ITA** Com respeito à equação polinomial $2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2 = 0$ é correto afirmar que

A todas as raízes estão em $\mathbb{Q}$.

B uma única raiz está em $\mathbb{Z}$ e as demais estão em $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$.

C duas raízes estão em $\mathbb{Q}$ e as demais têm parte imaginária não nula.

D não é divisível por $2x - 1$.

E uma única raiz está em $\mathbb{Q}$ pelo menos uma das demais está em $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

18 **ITA 2013** Considere o sistema na variável real x:

$$\begin{cases} x^2 - x = \alpha \\ x - x^3 = \beta \end{cases}$$

a) Determine os números reais α e β para que o sistema admita somente soluções reais.

b) Para cada valor de β encontrado em (a), determine todas as soluções da equação $x - x^3 = \beta$.

19 **ITA 2014** Considere o polinômio complexo $p(z) = z^4 + az^3 + 5z^2 \quad iz \quad 6$, em que a é uma constante complexa. Sabendo que 2i é uma das raízes de $p(z) = 0$, as outras três raízes são

A 3i, 1, 1.

B i, i, 1.

C i, i, 1.

D 2i, 1, 1.

E 2i, –i, i.

20 **ITA 2015** Considere o polinômio p dado por $p(x) = 2x^3 + ax^2 + bx \quad 16$, com $a, b \in \mathbb{R}$. Sabendo-se que p admite raiz dupla e que 2 é uma raiz de p então o valor de $b - a$ é igual a

A 36.

B 12.

C 6.

D 12.

E 24.

21 **ITA 2015** Considere o polinômio p dado por $p(z) = 18z^3 + \beta z^2 - 7z - \beta$ em que β é um número real.

a) Determine todos os valores de β sabendo-se que p tem uma raiz de módulo igual a 1 e parte imaginária não nula.

b) Para cada um dos valores de β obtidos no item anterior, determine todas as raízes do polinômio p.

22 **ITA 2016** Seja p o polinômio dado por $p(x) = x^8 + x^m - 2x^n$, e, que os expoentes 8, *m* e *n* formam, nesta ordem, uma PA cuja soma dos termos é igual a 14. Considere as seguintes afirmações:

I. $x = 0$ é uma raiz dupla de p.

II. $x = 1$ é uma raiz dupla de p.

III. p tem 4 raízes com parte imaginária não nula.

Destas, é(são) verdadeira(s)

A apenas I

B apenas I e II

C apenas I e III

D apenas II e III

E I, II e III

23 **ITA 2016** Sejam *a*, *b*, *c* números reais com $a \neq 0$.

a) Mostre que a mudança $x + \frac{1}{x} = z$ transforma a equação $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$ numa equação de segundo grau.

b) Determine todas as raízes da equação $x^4 + 3x^3 \quad 2x^2 + 3x + 1 = 0$.

24 **ITA 2018** Considere a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, x \in \mathbb{R}.$$

Se o polinômio p(x) é dado por $p(x) = \det A$, então o produto das raízes de p(x) é

A $\frac{1}{2}$.

B $\frac{1}{3}$.

C $\frac{1}{5}$.

D $\frac{1}{7}$.

E $\frac{1}{11}$.

25 **ITA 2018** Se o sistema $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2a^2y + (2a^4 - a)z = 0 \\ x + ay + (a^3 - 1)z = 0 \end{cases}$ admite infinitas soluções, então os possíveis valores do parâmetro a são:

A $0, \quad 1, \frac{-1-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$.

B $0, \quad 1, \frac{1-\sqrt{3}}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

C $0, ^{+} 1, \frac{1 \ +\sqrt{3}}{2}, \frac{1 \quad \sqrt{3}}{2}$.

D $0, \ -1, \ -1-\sqrt{3}, \ -1+\sqrt{3}$.

E $0, -1, 1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}$.

26 **ITA 2019** Considere as seguintes afirmações:

I. se x_1, x_2 e x_3 são as raízes da equação $x^3 - 2x^2 + x + 2 = 0$, então $y_1 = x_2x_3$, $y_2 = x_1x_3$ e $y_3 = x_1x_2$ são as raízes da equação $y^3 - y^2 - 4y - 4 = 0$.

II. a soma dos cubos de três números inteiros consecutivos é divisível por 9.

III. $\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

É(são) VERDADEIRA(S)

A apenas I.
B apenas II.
C apenas III.
D apenas II e III.
E todas.

27 **ITA 2018** Seja p(x) um polinômio não nulo. Se $x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ e $x^3 - 5x^2 + 8x - 4$ são divisores de p(x), determine o menor grau possível de p(x).

28 **ITA 2019** Determine os valores reais de *a* e *b* para os quais as equações $x^3 + ax^2 + 18 = 0$ e $x^3 + bx + 12 = 0$ possuam duas raízes em comum e, a seguir, determi ne essas raízes.

29 **IME** Assinale a opção correspondente ao valor de μ que faz com que a equação $(1 + \mu)s^3 + 6s^2 + 5s + 1 = 0$ possua raízes no eixo imaginário.

A 0
B 6
C 14
D 29
E 41

30 **IME** Assinale a opção correspondente ao valor da soma das raízes da equação $y^{3/2} + 5y + y^{1/2} + 8 = 0$.

A 5
B 2
C 21
D $5^{1/2}$
E 0,5

31 **IME** Considere o sistema $\begin{cases} xy + x - y = 5 \\ x^3y^2 - x^2y^3 - 2x^2y + 2xy^2 = 6 \end{cases}$

onde x e y são números inteiros. O valor de $x^3 + y^2 + x^2 + y$ é:

A 14
B 18
C 20
D 32
E 38

32 **IME** Seja o polinômio $p(x) = x^3 + (\ln a)x + e^b$, onde *a* e *b* são números reais positivos diferentes de zero. A soma dos cubos das raízes de p(x) depende

A apenas de *a* e é positiva.
B de *a* e *b* e é negativa.
C apenas de *b* e é positiva.
D apenas de *b* e é negativa.
E de *a* e *b* e é positiva.

Obs.: e representa a base do logaritmo neperiano e ln*a* a função logaritmo neperiano.

33 **IME 2012 (Adapt.)** Sabe-se que a, b e c são raízes da equação $6x^3 - 5x^2 + 2x - 3 = 0$. Determine um número real d, positivo, tal que $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$.

A $\frac{1}{6}$
B $\frac{1}{3}$
C $\frac{1}{2}$
D $\frac{2}{3}$
E 1

34 **IME 2013** Os polinômios $P(x) = x^3 + ax^2 + 18$ e $Q(x) = x^3 + bx + 12$ possuem duas raízes comuns. Sabendo que *a* e *b* são números reais, pode-se afirmar que satisfazem a equação

A a = b
B 2a = b
C a = 2b
D 2a = 3b
E 3a = 2b

35 **IME 2014** O polinômio $P(x) = x^5 - 3x^4 + 10x^3 - 30x^2 + 81x - 243$ possui raízes complexas simétricas e uma raiz com valor igual ao módulo das raízes complexas. Determine todas as raízes do polinômio.

36 **IME 2016** O polinômio $x^3 + ax^2 + bx + c$ tem raízes reais $\alpha, -\alpha$ e $\frac{1}{\alpha}$. Portanto o valor da soma $b + c^2 + ac + \frac{b}{c^2}$ é:

A −2
B −1
C 0
D 1
E 2

37 **IME 2017** Sejam x, y e z complexos que satisfazem ao sistema de equações abaixo.

$$\begin{cases} x + y + z = 7 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{4} \\ x^2 + y^2 + z^2 = 25 \end{cases}$$

o valor da soma $x^3 + y^3 + z^3$ é:

A 210
B 235
C 250
D 320
E 325

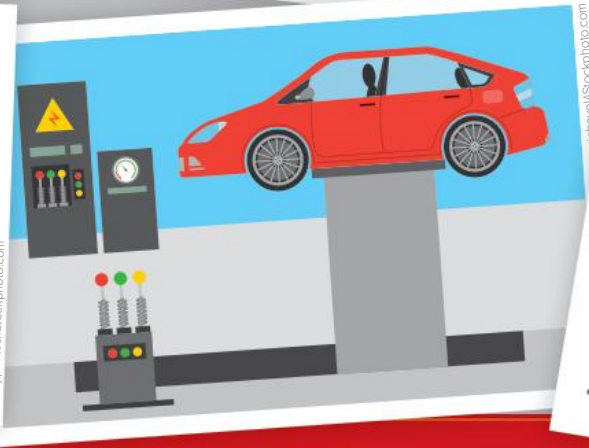
38 **IME 2018** Resolva a inequação abaixo, onde *x* é uma variável real.

$$2|x^3| \quad 6x^2 + 3|x| + 2 < 0$$

39 **IME 2019** Seja a inequação $6x^4 - 5x^3 - 29x^2 + 1 - x < 0$. Seja (a, b) um intervalo contido no conjunto solução dessa inequação. O maior valor possível para b − a é:

A 2
B $\frac{13}{6}$
C $\frac{1}{3}$
D $\frac{5}{2}$
E $\frac{8}{3}$

40 **IME 2019** Sejam x_1, x_2 e x_3 as raízes da equação $x^3 - ax - 16 = 0$. Sendo *a* um número real, o valor de $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$ é igual a:

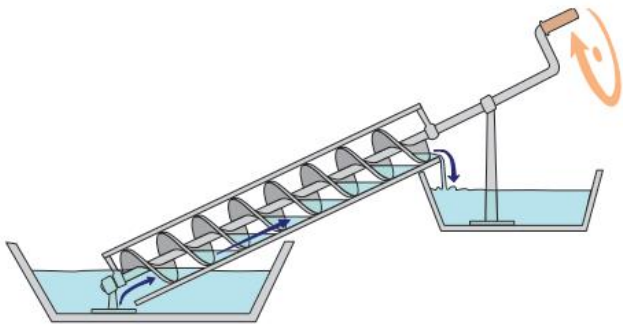
A 32 − a
B 48 − 2a
C 48
D 48 + 2a
E 32 + a

FRENTE 3

CAPÍTULO

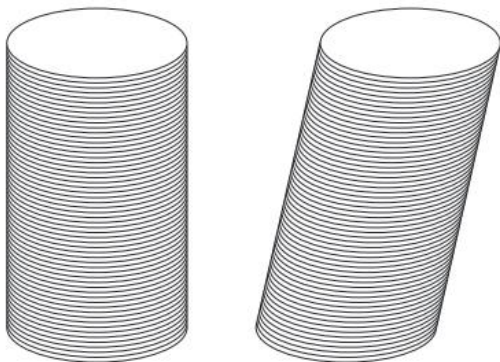
14

Cilindros

Uma das criações modernas que utiliza cilindros em sua estrutura é o amortecedor hidráulico, ou cilindro hidráulico. Ele é empregado, por exemplo, na suspensão de automóveis e motocicletas para aumentar o conforto, bem como em elevadores, tratores, guindastes e até em máquinas de alta precisão, seja para estabilizá-las, seja para movimentá-las. Além disso, encontramos a forma cilíndrica em uma infinidade de aplicações, por exemplo, embalagens, utensílios domésticos ou técnicos etc.

Agora vamos estudar uma figura geométrica muito utilizada pela humanidade, presente em aplicações muito simples como embalagens e até em algumas mais sofisticadas, como o parafuso de Arquimedes, que servia para transferir líquidos e grãos entre pontos de elevações diferentes.

Sergey Merkulov/Shutterstock.com

Definição

O cilindro é o primeiro sólido geométrico que estudaremos que se encaixa na ideia de corpos redondos. Sua definição formal é um pouco mais elaborada e falaremos dela a seguir. Primeiro, note que podemos ter uma boa noção desse sólido se pensarmos em uma pilha de "infinitos" círculos de mesmo diâmetro. Observe:

Uma maneira mais formal de imaginar o cilindro pode ser: "Sejam α e β dois planos paralelos distintos, um círculo λ contido em α e uma reta t que intercepta os dois planos. Denomina-se cilindro de base circular λ a união de todos os segmentos paralelos a t que possuem uma das extremidades em λ, no plano α, e outra em algum ponto de β e suas bases".

Observe na figura os principais elementos do cilindro:

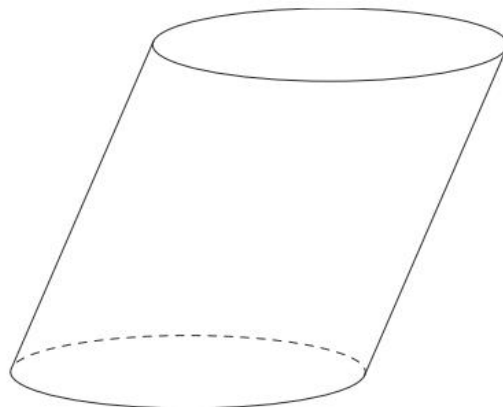
- As bases do cilindro são os dois círculos contidos nos planos paralelos α e β.
- O raio da base é R.
- O eixo do cilindro é e.
- A altura h é a distância entre os planos paralelos α e β.
- A geratriz é $\overline{AB}$. ($\overline{AB}$ // e)

Cilindro circular reto, ou cilindro de revolução

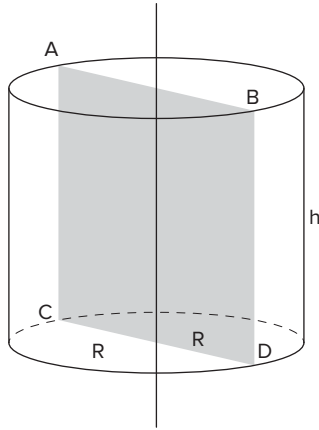
Quando o eixo **e** de um cilindro é perpendicular aos planos das bases, dizemos se tratar de um cilindro de revolução, pois ele é gerado por uma rotação completa de um retângulo em torno de um de seus lados.

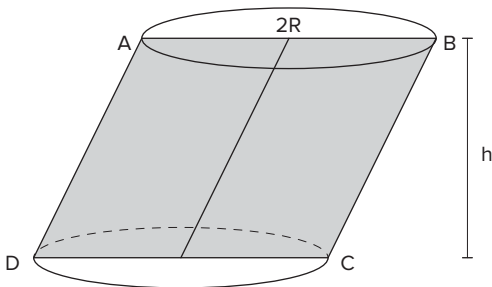
Note que, nesse tipo de cilindro, não fazemos distinção entre geratriz e altura (g = h).

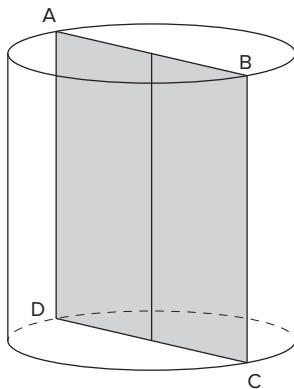
! Atenção

Existem cilindros que não podem ser obtidos pela rotação de um retângulo, os quais são chamados de cilindros oblíquos.

Seção meridiana

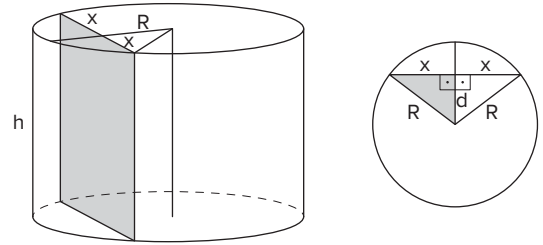
É a interseção de um cilindro de revolução com um plano que contém seu eixo. Nesse tipo de cilindro, a seção meridiana será sempre um retângulo com medida da base igual à medida do diâmetro da base do cilindro (2R) e altura coincidindo com a altura do cilindro (h).

Portanto, a área da seção meridiana será $A_{seção} = 2Rh$.

Atenção

Em cilindros oblíquos, as seções meridianas serão paralelogramos de base igual ao diâmetro da base do cilindro (2R) e altura igual à do cilindro (h).

Cilindro equilátero

Se a seção meridiana em um cilindro reto for um quadrado, ou seja, se a altura tiver a mesma medida que o diâmetro da base, dizemos que esse cilindro é equilátero.

ABCD é um quadrado (h = 2R).

Seção não meridiana

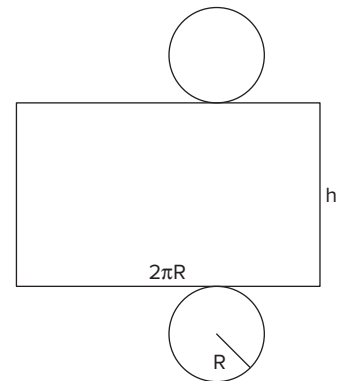
Podemos também fazer cortes no cilindro que não contenham o seu eixo. Quando esses cortes são paralelos ao eixo do cilindro, fazemos uma análise olhando para a base. Vamos fazer um estudo genérico para um corte a uma distância d do eixo do cilindro.

Sendo d a distância da seção ao eixo, temos, por Pitágoras:

$$R^2 = d^2 + x^2$$

A área da seção será $A_{seção} = 2xh$, já que é um retângulo.

Áreas no cilindro de revolução

A área lateral de um cilindro corresponde à área da superfície cilíndrica. Dessa forma, calcular a **área lateral** de um cilindro, ou seja, a área da superfície cilíndrica, pode ser difícil se o cilindro for oblíquo. Contudo, se o cilindro for reto, a tarefa é mais simples.

Para calcular a área lateral, no caso de um cilindro de revolução, basta planificar o cilindro e perceber que a planificação da superfície lateral é um retângulo cuja base tem medida igual ao comprimento da circunferência da base do cilindro e altura igual à altura do cilindro. Observe:

Assim, a área lateral do cilindro é dada por:

$$A_{lateral} = 2\pi R \cdot h$$

Para calcular a área total, devemos observar na planificação que ela é formada pela superfície lateral e duas bases circulares. Logo, a área total será dada por:

$$A_{total} = A_{lateral} + 2 \cdot A_{base} = 2\pi Rh + 2\pi R^2 = 2\pi R(h + R)$$

FRENTE 3

Exercício resolvido

1 **Uece 2018** A medida, em m^2, da área da superfície total (área lateral e bases) de um cilindro circular reto tal que a medida da altura e a medida do raio da base são ambas iguais a 2 m é

A 14π. B 12π. C 16π. D 10π.

Resolução:

Sendo $h = R = 2$ m, temos:

$A_{total} = 2\pi R \cdot h + 2\pi R^2$

$A_{total} = 2\pi \cdot 2 \cdot 2 + 2\pi \cdot 2^2$

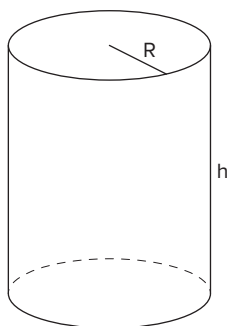
$A_{total} = 8\pi + 8\pi$

$A_{total} = 16\pi \text{ m}^2$

Alternativa: C

Volume de um cilindro qualquer

Quando estudamos prismas, verificamos que seu volume não depende da forma da base, e sim da área dessa base e da altura do prisma. Da mesma forma, pelo princípio de Cavalieri, verificamos que o volume de um cilindro qualquer é dado pela expressão:

$$V = A_{base} \cdot h = \pi R^2 \cdot h$$

Exercícios resolvidos

2 Determine as expressões para a área lateral, a área total e o volume de um cilindro equilátero de raio da base R.

Resolução:

Lembrando que, em um cilindro equilátero, a seção meridiana é um quadrado e que, portanto, $h = 2R$, temos:

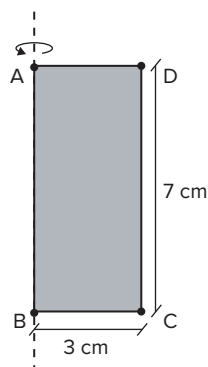
$A_{lateral} = 2\pi R \cdot h = 2\pi R \cdot 2R = 4\pi R^2$

$A_{total} = A_{lateral} + 2 \cdot A_{base} = 2\pi R \cdot h + 2\pi R^2 =$

$= 2\pi R \cdot 2R + 2\pi R^2 = 4\pi R^2 + 2\pi R^2 = 6\pi R^2$

$V = \pi R^2 \cdot h = \pi R^2 \cdot 2R = 2\pi R^3$

Essas expressões podem ser utilizadas como fórmulas para cilindros equiláteros.

3 **FMP 2018** A figura mostra um retângulo ABCD cujos lados medem 7 cm e 3 cm. Um cilindro será formado girando-se o retângulo ABCD em torno da reta definida pelo seu lado $\overline{AB}$.

A medida do volume desse cilindro, em centímetros cúbicos, é mais próxima de

A 190
B 63
C 126
D 750
E 441

Resolução:

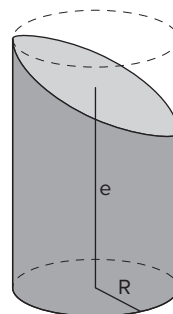
Ao rotacionar o retângulo em torno da reta que passa por A e B, obteremos um cilindro com raio da base igual a 3 cm e altura 7 cm. Como o volume do cilindro é dado por $V = A_{base} \cdot h$, obtemos:

$$V = \pi R^2 \cdot h = \pi \cdot 3^2 \cdot 7 = 63\pi \text{ cm}^3$$

Aproximando $\pi = 3{,}14$, encontramos $V \cong 63 \cdot 3{,}14 \Leftrightarrow \Leftrightarrow V \cong 197{,}82 \text{ cm}^3$.

Alternativa: A

Tronco de um cilindro reto

Quando seccionamos um cilindro reto por um plano não paralelo à base nem ao eixo, obtemos o sólido denominado tronco de cilindro.

Na figura, podemos perceber que o tronco de cilindro pode ser tratado como um cilindro com altura igual ao comprimento do eixo do tronco. Assim, a área lateral e o volume do tronco serão dados por:

$$A_{lateral} = 2\pi R \cdot e \quad \text{e} \quad V = \pi R^2 \cdot e$$

Saiba mais

Entre os cilindros retos estudados, o cilindro equilátero tem uma propriedade interessante: "Variando-se o raio da base e/ou a altura, mas se mantendo a mesma área total, terá maior volume o cilindro equilátero ($h = 2R$)".

Em outras palavras, na construção de cilindros, com uma mesma quantidade de material, o cilindro de maior volume será obtido quando for equilátero, ou seja, a altura for igual ao diâmetro da base. Por esse motivo, fabricantes de embalagens como latas de molho de tomate ou creme de leite utilizam formas de cilindros equiláteros, pois se gasta **menos** material para comportar um **mesmo** volume.

Exercícios resolvidos

4 FGV 2018 Um telhado retangular ABCD tem área igual a 120 m^2 e está conectado a uma calha de escoamento de água da chuva. A calha tem a forma de um semicilindro reto, de diâmetro $AF = DE = 0,4$ m e capacidade igual a 720 litros.

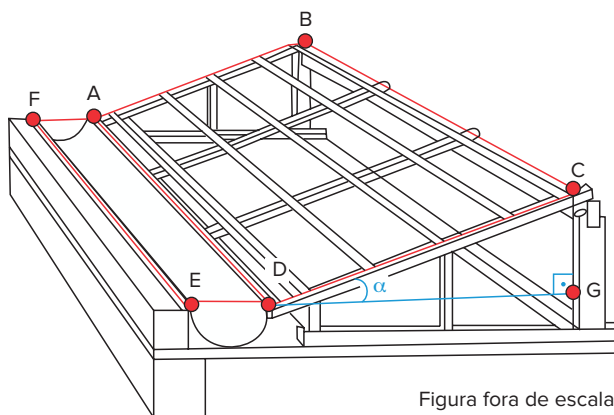



Figura fora de escala

Considerando DG = 5 m e adotando $\pi = 3$, a medida do ângulo agudo $C\hat{D}G$, indicada na figura por α, é igual a

A $75°$.
B $60°$.
C $45°$.
D $30°$.
E $15°$.

Resolução:

A calha tem capacidade de 720 litros, o que corresponde a dizer que comporta um volume de 720 dm^3, e a forma de um semicilindro com raio da base 2 dm. Assim, podemos escrever:

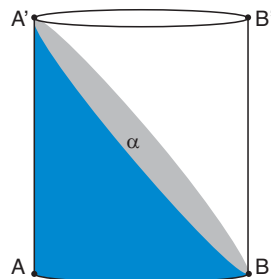
$$720 = \frac{\pi \cdot 2^2 \cdot AD}{2} \Rightarrow AD = \frac{720}{2 \cdot 3} = 120 \text{ dm} = 12 \text{ m}$$

Como a área do telhado mede 120 m^2, temos:

$$CD \cdot 12 = 120 \Rightarrow CD = 10 \text{ m}$$

Observando que o triângulo CDG é retângulo, obtemos $\cos\alpha = \frac{DG}{CD} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60°$.

Alternativa: B

5 Uerj 2017 Um cilindro circular reto possui diâmetro AB de 4 cm e altura AA' de 10 cm. O plano α, perpendicular à seção meridiana ABB'A', que passa pelos pontos B e A' das bases, divide o cilindro em duas partes, conforme ilustra a imagem.

O volume da parte do cilindro compreendida entre o plano α e a base inferior, em cm^3, é igual a:

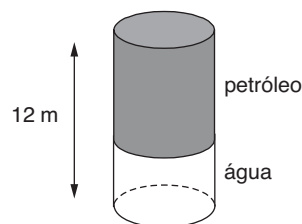
A 8π
B 12π
C 16π
D 20π

Resolução:

O sólido cujo volume devemos calcular corresponde a um tronco de cilindro equivalente à metade do cilindro. Logo:

$$V = \frac{\pi R^2 \cdot h}{2} = \frac{\pi \cdot 2^2 \cdot 10}{2} = 20\pi \text{ cm}^3$$

Alternativa: D

6 Unesp Um tanque subterrâneo, que tem a forma de um cilindro circular reto na posição vertical, está completamente cheio com 30 m^3 de água e 42 m^3 de petróleo.

Se a altura do tanque é 12 metros, a altura, em metros, da camada de petróleo é

A 2π.
B 7.
C $\frac{7\pi}{3}$.
D 8.
E $\frac{8\pi}{3}$.

Resolução:

Como a área da base é a mesma, podemos dizer que o volume de cada líquido é proporcional à altura que ocupa no cilindro, ou seja:

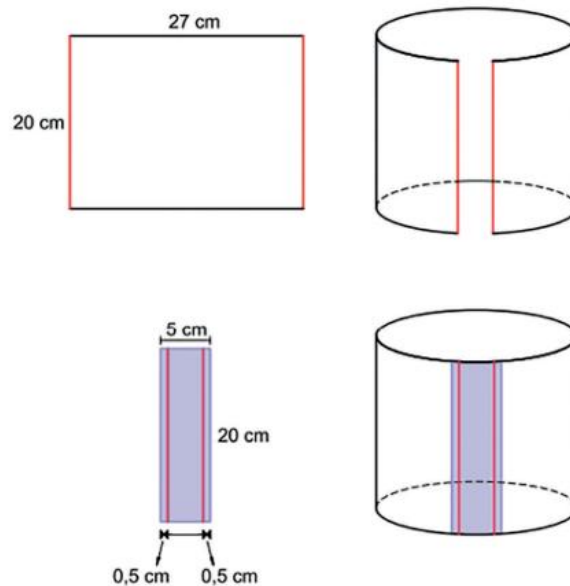
$$\frac{30+42}{42} = \frac{12}{h_{petróleo}} \Leftrightarrow \frac{72}{42} = \frac{12}{h_{petróleo}} \Rightarrow h_{petróleo} = \frac{42 \cdot 12}{72} = 7 \text{ m}$$

Alternativa: B

Revisando

1 **IFSC 2017** Diante dos frequentes períodos de estiagem na cidade onde está sediada, a empresa MESOC decidiu construir um reservatório para armazenar água.
Considerando que esse reservatório deva ser cilíndrico e ter 10 metros de diâmetro interno e 10 metros de altura, assinale a alternativa **CORRETA**.
A capacidade do reservatório a ser construído, em litros, será:
Obs.: (Use $\pi = 3,1$)

A 3100 B 7750 C 155000 D 310000 E 775000

2 **Unesp 2018** Os menores lados de uma folha de papel retangular de 20 cm por 27 cm foram unidos com uma fita adesiva retangular de 20 cm por 5 cm, formando um cilindro circular reto vazado. Na união, as partes da fita adesiva em contato com a folha correspondem a dois retângulos de 20 cm por 0,5 cm, conforme indica a figura.

Desprezando-se as espessuras da folha e da fita e adotando $\pi = 3,1$, o volume desse cilindro é igual a

A 1550 cm^3. B 2540 cm^3. C 1652 cm^3. D 4805 cm^3. E 1922 cm^3.

3 **Enem 2018** Um artesão possui potes cilíndricos de tinta cujas medidas externas são 4 cm de diâmetro e 6 cm de altura. Ele pretende adquirir caixas organizadoras para armazenar seus potes de tinta, empilhados verticalmente com tampas voltadas para cima, de forma que as caixas possam ser fechadas.
No mercado, existem cinco opções de caixas organizadoras, com tampa, em formato de paralelepípedo reto retângulo, vendidas pelo mesmo preço, possuindo as seguintes dimensões internas:

Modelo	Comprimento (cm)	Largura (cm)	Altura (cm)
I	8	8	40
II	8	20	14
III	18	5	35
IV	20	12	12
V	24	8	14

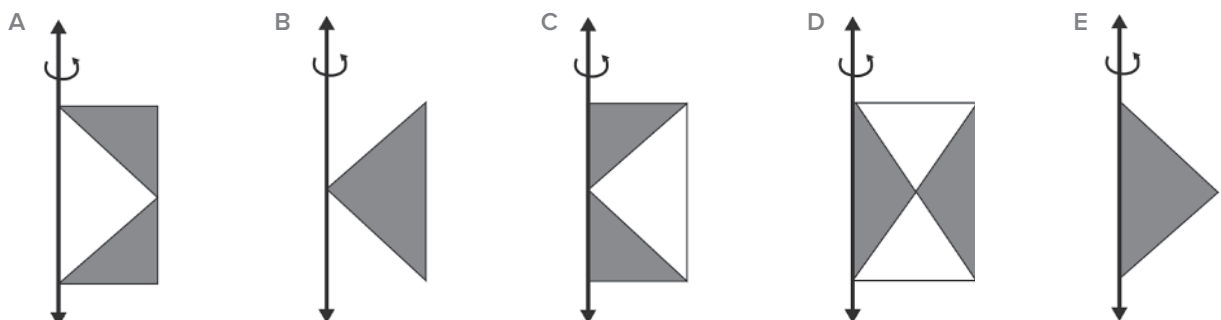
Qual desses modelos o artesão deve adquirir para conseguir armazenar o maior número de potes por caixa?

A I
B II
C III
D IV
E V

4 **Enem PPL 2018** A figura mostra uma anticlepsidra, que é um sólido geométrico obtido ao se retirar dois cones opostos pelos vértices de um cilindro equilátero, cujas bases coincidam com as bases desse cilindro. A anticlepsidra pode ser considerada, também, como o sólido resultante da rotação de uma figura plana em torno de um eixo.

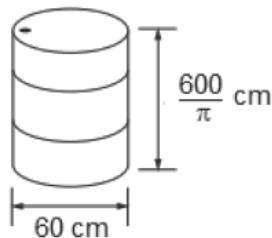
Disponível em: www.klickeducacao.com.br.
Acesso em: 12 dez. 2012 (adaptado).

A figura plana cuja rotação em torno do eixo indicado gera uma anticlepsidra como a da figura acima é

A
B
C
D
E
FRENTE 3

5 **UFRGS 2018** Um tanque no formato de um cilindro circular reto, cujo raio da base mede 2 m, tem o nível da água aumentado em 25 cm após uma forte chuva. Essa quantidade de água corresponde a 5% do volume total de água que cabe no tanque.

Assinale a alternativa que melhor aproxima o volume total de água que cabe no tanque, em m^3.

A 57 B 60 C 63 D 66 E 69

6 **UPF 2017** Um tonel está com 30% da sua capacidade preenchida por um certo combustível. Sabendo que esse tonel tem diâmetro de 60 cm e altura de $\frac{600}{\pi}$ cm, a quantidade de combustível contida nesse tonel, em litros, é

A 1,62 B 16,2 C 162 D 180 E 162 000

7 **PUC-RS 2018** Um recipiente cilíndrico tem 3 cm de raio e 24 cm de altura. Estando inicialmente cheio d'água, o recipiente é inclinado até que o plano de sua base faça 45° com o plano horizontal. Nessa posição, o volume de água que permanecerá no recipiente será igual a ____________ do volume inicial.

A um oitavo
B um sexto
C sete oitavos
D cinco sextos

8 **IFBA 2017** Um metalúrgico utilizou num determinado trabalho uma folha de metal retangular de dimensões 20 cm e 30 cm, com o intuito de formar um cilindro, unindo os lados da folha de metal de mesma dimensão, e verificou que existiam duas possibilidades:

A: Utilizar o lado de 20 cm como altura do cilindro;

B: Utilizar o lado de 30 cm como altura do cilindro.

Considerando $\pi = 3$ e chamando de V_A o volume da possibilidade A, e V_B o volume da possibilidade B. Podemos afirmar que:

A $V_A = V_B = 1000$
B $V_A = V_B = 1500$
C $V_A = 1000$ e $V_B = 1500$
D $V_A = 2000$ e $V_B = 3000$
E $V_A = 1500$ e $V_B = 1000$

FRENTE 3

9 **Enem Libras 2017** Com o objetivo de reformar os tambores cilíndricos de uma escola de samba, um alegorista decidiu colar adereços plásticos na forma de losango, como ilustrado na Figura 1, nas faces laterais dos tambores. Nesta colagem, os vértices opostos *P* e *Q* do adereço deverão pertencer às circunferências do topo e da base do tambor cilíndrico, respectivamente, e os vértices opostos *R* e *S* deverão coincidir após a colagem do adereço no tambor, conforme ilustra a Figura 2. Considere que o diâmetro do cilindro correspondente ao tambor meça 0,4 metro. Utilize 3,1 como aproximação para π.

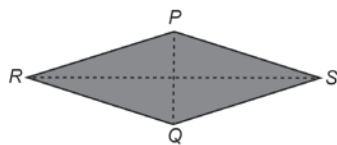
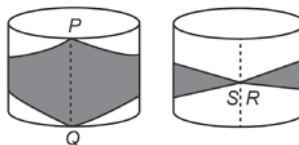
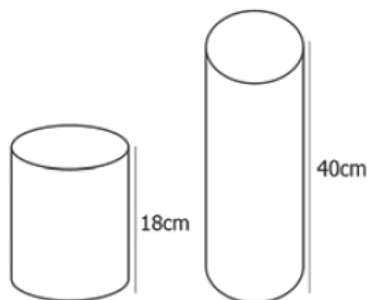



Figura 1 Figura 2

A diagonal $\overline{RS}$ do adereço a ser confeccionado pelo alegorista deve medir, em metro,

A 0,124.
B 0,400.
C 0,496.
D 1,240.
E 2,480.

10 **EEAR 2016** Um cilindro de 18 cm de altura e raio da base igual a 5 cm contém água até a metade de sua altura. Por algum motivo, houve necessidade de despejar essa água em outro cilindro com 40 cm de altura, cujo raio da base mede 4 cm.

Considerando $\pi = 3$, o valor que mais se aproxima da altura atingida pela água no segundo cilindro é

A 14 cm
B 16 cm
C 20 cm
D 24 cm

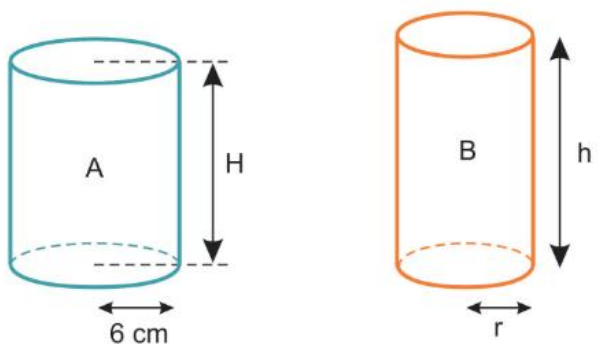
Exercícios propostos

1 Unesp Se quadruplicarmos o raio da base de um cilin dro, mantendo a sua altura, o volume do cilindro fica multiplicado por

A 16.
B 12.
C 8.
D 4.
E 4π.

2 Udesc 2018 Uma coroa cilíndrica é a região espacial situada entre dois cilindros concêntricos de mesma altura, um com raio R e outro com raio r, sendo $r < R$. Se a altura, o volume e a soma das medidas dos raios dessa coroa cilíndrica são, respectivamente, 4 cm, $4{,}25\pi$ cm^3 e 4,25 cm, então a área total de sua superfície é:

A 34π cm^2
B $18{,}0625\pi$ cm^2
C $20{,}125\pi$ cm^2
D $18{,}125\pi$ cm^2
E $36{,}125\pi$ cm^2

3 Famema 2017 Um cilindro circular reto A, com raio da base igual a 6 cm e altura H, possui a mesma área lateral que um cilindro circular reto B, com raio da base r e altura h, conforme mostram as figuras.

fora de escala

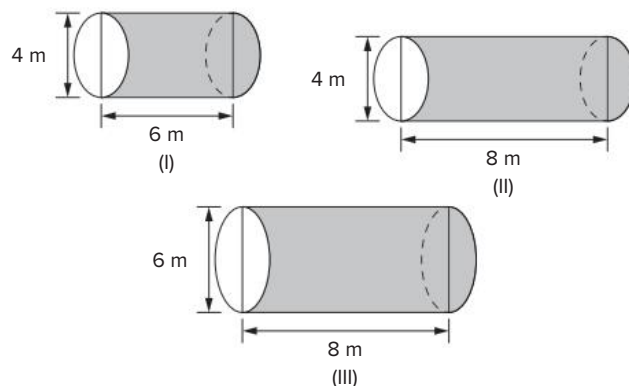
Sabendo que $\frac{h}{H} = 1{,}2$ e que o volume do cilindro B é 240π cm^3, é correto afirmar que a diferença entre os volumes dos cilindros é

A 50π cm^3.
B 42π cm^3.
C 45π cm^3.
D 48π cm^3.
E 37π cm^3.

4 IFPE 2018 Milena é aluna do curso de Saneamento no campus Afogados da Ingazeira e convenceu seu pai a construir um tanque de tratamento da água do esgoto no quintal de sua casa. Como o espaço disponível não é tão grande, o tanque tem por base um setor circular de um quarto de volta com 1 metro de raio e 2,5 metros de profundidade.

Se o tratamento utilizado por Milena consegue reaproveitar 80% da água, estando o tanque completamente cheio, quantos litros de água poderão ser reaproveitados? ($\pi = 3{,}14$)

A 6 280 litros.
B 7 850 litros.
C 2 000 litros.
D 2 512 litros.
E 1570 litros.

5 Enem Uma empresa vende tanques de combustíveis de formato cilíndrico, em três tamanhos, com medidas indicadas nas figuras. O preço do tanque é diretamente proporcional à medida da área da superfície lateral do tanque. O dono de um posto de combustível deseja encomendar um tanque com menor custo por metro cúbico de capacidade de armazenamento.

Qual dos tanques deverá ser escolhido pelo dono do posto? (Considere $\pi \cong 3$)

A I, pela relação área/capacidade de armazenamento de $\frac{1}{3}$.
B I, pela relação área/capacidade de armazenamento de $\frac{4}{3}$.
C II, pela relação área/capacidade de armazenamento de $\frac{3}{4}$.
D III, pela relação área/capacidade de armazenamento de $\frac{2}{3}$.
E III, pela relação área/capacidade de armazenamento de $\frac{7}{12}$.

6 UFU 2015 O rendimento teórico de uma tinta é a quantidade necessária para pintar um metro quadrado de área e serve apenas para determinar o custo por metro quadrado da tinta. O rendimento real de uma tinta é calculado no final do trabalho executado que leva em conta o número de demãos (números de camadas de tintas necessárias para obter o resultado esperado) e as perdas decorrentes da preparação e do método de aplicação. Admita que as perdas, usando os diferentes métodos de pintura, são estimadas em: pincel 10%, rolo 20% e pistola pneumática 25%.

Um pintor vai pintar toda a superfície de um tanque de combustível na forma de um cilindro circular de 10 m de altura e raio da base igual a 2 m. Sabe-se que a tinta a ser usada tem rendimento teórico de 20 m^2 por litro e que são necessárias duas demãos.

Determine a quantidade, em litros, de tintas necessárias para pintar esse tanque utilizando a pistola pneumática.

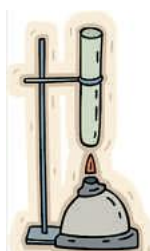
Dados: Use $\pi = 3{,}14$.

7 **Enem 2011** É possível usar água ou comida para atrair as aves e observá-las. Muitas pessoas costumam usar água com açúcar, por exemplo, para atrair beija-flores. Mas é importante saber que, na hora de fazer a mistura, você deve sempre usar uma parte de açúcar para cinco partes de água. Além disso, em dias quentes, precisa trocar a água de duas a três vezes, pois com o calor ela pode fermentar e, se for ingerida pela ave, pode deixá-la doente. O excesso de açúcar, ao cristalizar, também pode manter o bico da ave fechado, impedindo-a de se alimentar. Isso pode até matá-la.

Ciência hoje das crianças. FNDE: Instituto Ciência Hoje, ano 19, n. 166, mar. 1996.

Pretende-se encher completamente um copo com a mistura para atrair beija-flores. O copo tem formato cilíndrico, e suas medidas são 10 cm de altura e 4 cm de diâmetro. A quantidade de água que deve ser utilizada na mistura é cerca de (utilize $\pi = 3$)

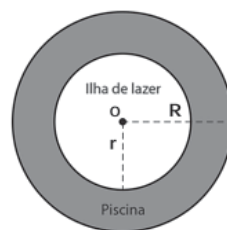
A 20 mL.
B 24 mL.
C 100 mL.
D 120 mL.
E 600 mL.

8 **FCMMG 2018** Em trabalhos de laboratório, é comum acompanhar o comportamento de líquidos em aquecimento. Os líquidos, da mesma forma que os sólidos, passam por uma dilatação quando são aquecidos. Por não possuírem forma específica, os líquidos assumem o formato do recipiente em que foram alojados.
Ao analisar o comportamento térmico de um líquido, percebe-se que sua dilatação ocorre ao mesmo tempo em que ocorre a dilatação do recipiente, ou seja, quando aquecido, o complexo (líquido + recipiente) se dilata. Na prática, quando somente se considera que a capacidade do frasco aumentou, a dilatação observada para o líquido será uma dilatação aparente. A dilatação real sofrida pelo líquido é superior à dilatação aparente e é idêntica à soma da dilatação aparente com a dilatação do recipiente.

Durante um experimento prático de aquecimento de determinado líquido, foi utilizado um tubo de ensaio graduado que indicava, inicialmente, a marcação de um volume de 30 cm^3.
Após 4 minutos de aquecimento, o volume no tubo de ensaio indicava 32 cm^3 e também uma elevação de, aproximadamente, 3 mm na altura do líquido armazenado no tubo de ensaio.
Considerando-se as informações dadas, pode-se concluir que o diâmetro do tubo de ensaio, após o aquecimento, era de, aproximadamente:

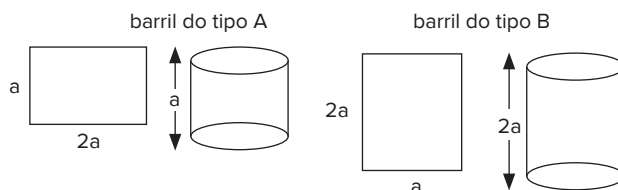
A 4 cm
B 3 cm
C 2 cm
D 1,5 cm

9 **Fuvest** Um castelo está cercado por uma vala cujas bordas são dois círculos concêntricos de raios 41 m e 45 m. A profundidade da vala é constante e igual a 3 m.

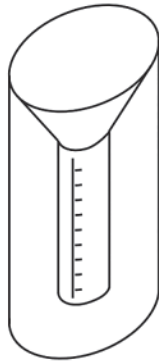
O proprietário decidiu enchê-la com água e, para este fim, contratou caminhões pipa, cujos reservatórios são cilindros circulares retos com raio da base de 1,5 m e altura igual a 8 m.
Determine o número mínimo de caminhões pipa necessário para encher completamente a vala.

10 **Enem 2013** Num parque aquático existe uma piscina infantil na forma de um cilindro circular reto, de 1 m de profundidade e volume igual a 12 m^3, cuja base tem raio **R** e centro **O**. Deseja-se construir uma ilha de lazer seca no interior dessa piscina, também na forma de um cilindro circular reto, cuja base estará no fundo da piscina e com centro de base coincidindo com o centro do fundo da piscina, conforme a figura. O raio da ilha de lazer será **r**. Deseja-se que após a construção dessa ilha, o espaço destinado à água na piscina tenha volume de, no mínimo, 4 m^3.

Considere 3 como valor aproximado para π.
Para satisfazer as condições dadas, o raio máximo da ilha de lazer **r**, em metros, estará mais próximo de

A 1,6.
B 1,7.
C 2,0.
D 3,0.
E 3,8.

11 **Fuvest** Uma metalúrgica fabrica barris cilíndricos de dois tipos, A e B, cujas superfícies laterais são moldadas a partir de chapas metálicas retangulares de lados a e 2a, soldando lados opostos dessas chapas, conforme ilustrado a seguir.

Se V_A e V_B indicam os volumes dos barris do tipo A e B, respectivamente, tem-se:

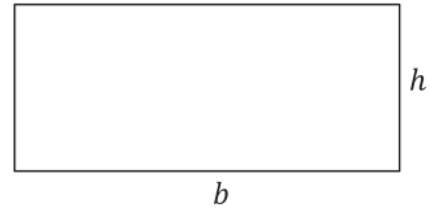
A $V_A = 2V_B$
B $V_B = 2V_A$
C $V_A = V_B$
D $V_A = 4V_B$
E $V_B = 4V_A$

12 **Unicamp** Um pluviômetro é um aparelho utilizado para medir a quantidade de chuva precipitada em determinada região. A figura de um pluviômetro padrão é exibida a seguir. Nesse pluviômetro, o diâmetro da abertura circular existente no topo é de 20 cm. A água que cai sobre a parte superior do aparelho é recolhida em um tubo cilíndrico interno. Esse tubo cilíndrico tem 60 cm de altura e sua base tem 1/10 da área da abertura superior do pluviômetro. (Obs.: a figura não está em escala.)

a) Calcule o volume do tubo cilíndrico interno.
b) Supondo que, durante uma chuva, o nível da água no cilindro interno subiu 2 cm, calcule o volume de água precipitado por essa chuva sobre um terreno retangular com 500 m de comprimento por 300 m de largura.

13 **Unesp** Considere uma lata cilíndrica de raio r e altura h completamente cheia de um determinado líquido. Este líquido deve ser distribuído totalmente em copos também cilíndricos, cuja altura é um quarto da altura da lata e cujo raio é dois terços do raio da lata. Determine:
a) os volumes da lata e do copo, em função de r e h;
b) o número de copos necessários, considerando que os copos serão totalmente cheios com o líquido.

14 **PUC-PR 2016** Um medicamento que dilata os vasos e artérias do corpo humano é ministrado e aumenta o diâmetro em 20% de determinada artéria. Considerando que a artéria se assemelha a um cilindro circular reto, o fluxo sanguíneo nessa artéria aumenta em
A 10%.
B 20%.
C 21%.
D 40%.
E 44%.

15 **Ifal 2017** Um garoto pega uma folha retangular de dimensões 21 cm e 30 cm e une os lados menores formando um cilindro. Qual o volume do cilindro obtido? Considere $\pi = 3$.
A 630 cm^3.
B 1102,5 cm^3.
C 14175 cm^3.
D 1575 cm^3.
E 1890 cm^3.

16 **UFPR 2017** Na modelagem matemática de um processo de fabricação, é comum supor que não há perda de material com emendas, sobreposição de partes etc.

Deseja-se construir um reservatório cilíndrico com diâmetro de 120 cm e capacidade de 1,5 m^3. Neste problema, estamos nos referindo a um cilindro circular reto perfeito. Para fazer a lateral desse cilindro, será usada uma chapa metálica retangular de comprimento *b* e altura *h*. Use $\pi = 3{,}14$ e dê suas respostas com duas casas decimais.
a) Calcule o comprimento *b* que a chapa deve ter.
b) Calcule a altura *h* que a chapa deve ter.

17 **UEM 2017** Considere um paralelepípedo reto retângulo de altura 2 cm, sobre uma superfície horizontal plana. A face sobre o plano (que chamaremos de base) tem arestas medindo 4π cm e 8π cm. Uma superfície cilíndrica com geratriz de comprimento igual ao de duas das arestas da base (com uma geratriz colocada sobre uma dessas arestas) gira, sem derrapar sobre a face paralela à base, 4 voltas para percorrer de uma aresta à outra. Considerando esses dados, assinale o que for **correto**.
01 O volume do paralelepípedo é $128\pi^2$ cm^3.
02 Se a geratriz do cilindro mede 8π cm, então o raio do cilindro mede 2 cm.
04 Se a geratriz do cilindro mede 4π cm, então o raio do cilindro mede 2 cm.
08 Se a geratriz do cilindro mede 4π cm, então o volume do cilindro é igual a π^3 cm^3.
16 Se a geratriz do cilindro mede 8π cm, então o volume do cilindro é igual a $2\pi^2$ cm^3.

Soma:

18 **UFU 2016** A densidade (ou densidade volumétrica) de um material mede a quantidade de matéria (massa) que está presente em uma unidade de volume desse material. Embora todo material seja um objeto espacial, é comum considerarmos sendo de "natureza linear". Por exemplo, um fio de cobre tem natureza linear e consideramos sua densidade linear (razão de sua massa pelo seu comprimento).
O vergalhão CA-60 são barras de aço muito resistentes, utilizadas na construção civil e comercializadas em barras padrão de 12 metros. Admitindo que essas barras sejam cilíndricas, seus diâmetros (bitolas) variam de 4,2 a 9,5 mm.
De acordo com as especificações da norma NBR 7480, a barra da bitola de 6,0 mm tem densidade linear de 0,222 kg/m (quilograma por metro).

Com base nas informações apresentadas, a densidade, em kg/m^3, de uma barra de bitola 6 mm é igual a

A $\frac{222}{36\pi}$

B $\frac{222}{9\pi}$

C $\frac{222000}{9\pi}$

D $\frac{222000}{36\pi}$

19 **PUC-SP 2016** Dispõe-se de N tubos cilíndricos, todos iguais entre si, cada qual com diâmetro interno de 4 cm. Se esses tubos transportam a mesma quantidade de água que um único tubo cilíndrico, cujo diâmetro interno mede 12 cm e cujo comprimento é igual ao dobro do comprimento dos primeiros, então:

A $N > 15$

B $10 < N < 15$

C $6 < N < 10$

D $N < 6$

20 **Acafe 2016** As colunas de sustentação de uma determinada ponte são formadas por cilindros retos, sem bases (são cilindros vazados, que posteriormente serão preenchidos com concreto), de 8 metros de diâmetro e com capacidade de 314 000 litros. Para a confecção desses cilindros, a indústria usa chapas metálicas retangulares de 3,15 m × 1,56 m. As chapas serão unidas por filetes também metálicos que serão soldados ao longo das dimensões da chapa (despreze as dimensões dos filetes).

Considere as afirmações a seguir, assinalando **V** para as verdadeiras e **F** para as falsas.

Dado: Use $\pi = 3{,}14$.

( ) A altura do cilindro é um número entre 5 metros e 7 metros.

( ) Quando planificado, o cilindro torna-se um retângulo cujo lado maior mede entre 7 metros e 10 metros.

( ) O número de chapas utilizadas na construção de um cilindro pertence ao intervalo [28, 36].

A sequência **correta**, de cima para baixo, é:

A F F V.

B V V F.

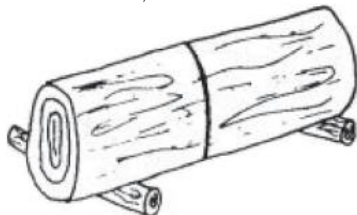
C V V V.

D V F V.

Texto complementar

O volume da tora de madeira

Num encontro sobre ensino de Matemática realizado certa vez em Vitória, um aluno da Universidade do Espírito Santo descreveu-me um processo usado por seu pai, que trabalhava numa serraria, para obter o volume de uma tora de madeira.

Com um barbante, ele dá uma volta no tronco.

O barbante é então cortado no ponto em que a volta se completa. A seguir, ele dobra o barbante ao meio, juntando suas pontas. Depois, dobra-o novamente ao meio. Em seguida, mede o comprimento do barbante dobrado em quatro.

O valor assim obtido é então multiplicado por ele mesmo e este resultado é depois multiplicado pelo comprimento do tronco. Pronto: o produto final obtido é o volume da tora.

Vamos analisar este processo. Estará correto?

Suponhamos a tora cilíndrica de raio r e comprimento c. Com o barbante dando uma volta no tronco, ele obtém o perímetro da circunferência de raio r, isto é:

comprimento do barbante esticado: $2\pi r$

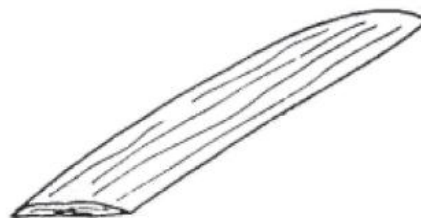
Dobrando duas vezes o barbante ao meio temos:

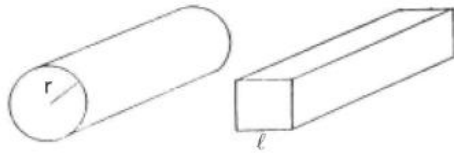
$$\frac{\text{comprimento do barbante esticado}}{4} = \frac{2\pi r}{4} = \frac{\pi r}{2}$$

Este é o valor que ele obtém com o metro. Multiplicando-o por si mesmo e a seguir pelo comprimento da tora temos:

$$\frac{\pi r}{2} \times \frac{\pi r}{2} \times c = \frac{\pi^2 r^2 c}{4} = \frac{\pi}{4} \times \pi r^2 c$$

O volume do cilindro de raio r e comprimento (ou altura) c é πr2c. Como $\pi < 4$, concluímos que o valor obtido pelo pai do rapaz é menor que o volume da tora. Uma vez que $\frac{\pi}{4} \cong \frac{3}{4} = 75\%$, o volume calculado é cerca de 75% do volume real.

Comentei este fato com o estudante e ele me disse que as pessoas que comercializam a madeira sabem desta diferença e a aceitam, devido ao seguinte: desdobrando a tora em tábuas, sobram as costaneiras, tábuas da periferia do tronco que não são vendidas.

Deste modo, justificavam a aproximação por falta, no cálculo do volume da tora cilíndrica.

É interessante perceber que o processo descrito corresponde à seguinte ideia: substituímos o cilindro por um prisma de base quadrada.

Os dois sólidos têm o mesmo comprimento (altura) e suas bases têm perímetros iguais.

Esta transformação do círculo em quadrado preserva o perímetro, mas não a área.

De fato:

$2\pi r = 4\ell \Rightarrow \ell = \frac{\pi r}{2}$

área do círculo = πr2

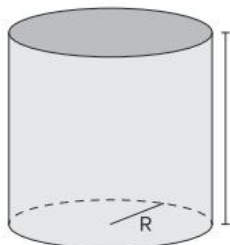
área do quadrado $\Rightarrow \ell^2 = \frac{\pi^2 r^2}{4} = \frac{\pi}{4} \cdot \pi r^2 < \pi r^2$

Logo, área do quadrado < área do círculo.

IMENES, Luiz Márcio. "Para que serve". *Revista do Professor de Matemática*. Rio de Janeiro, 9. ed. Disponível em: <http://rpm.org.br/cdrpm/9/3.htm>. Acesso em: 26 mar. 2019.

Resumindo

Cilindros

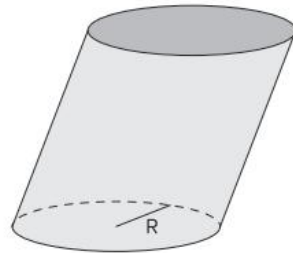
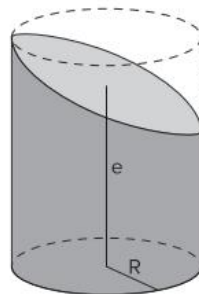
- Cilindro reto

$A_{lateral} = 2\pi Rh$

$A_{total} = 2\pi Rh + 2\pi R^2$

$V = A_{base} \cdot \text{altura} = \pi R^2 h$

- Cilindro oblíquo

$V = A_{base} \cdot \text{altura} = \pi R^2 h$

Tronco de cilindro

$A_{lateral} = 2\pi R \cdot e$

$V = \pi R^2 \cdot e$

Quer saber mais?

Sites

- Veja a planificação do cilindro no GeoGebra:
  Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/XzfFNDYV>.
- Conheça a história do parafuso de Arquimedes:
  Disponível em: <https://www.ufrgs.br/amlef/2019/12/01/parafuso-de--arquimedes/>.

Exercícios complementares

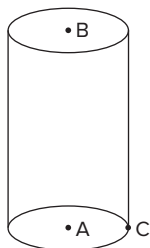
1 Unesp Considere um cilindro circular reto de altura x cm e raio da base igual a y cm. Usando a aproximação $\pi = 3$, determine x e y nos seguintes casos:

a) o volume do cilindro é 243 cm^3 e a altura é igual ao triplo do raio;

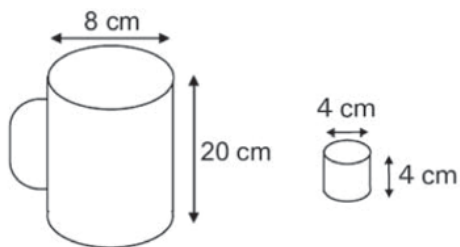
b) a área da superfície lateral do cilindro é 450 cm^2 e a altura tem 10 cm a mais que o raio.

2 Enem Para construir uma manilha de esgoto, um cilindro com 2 m de diâmetro e 4 m de altura (de espessura desprezível), foi envolvido homogeneamente por uma camada de concreto, contendo 20 cm de espessura. Supondo que cada metro cúbico de concreto custe R$ 10,00 e tomando 3,1 como valor aproximado de π, então o preço dessa manilha é igual a

A R$ 230,40.
B R$ 124,00.
C R$ 104,16.
D R$ 54,56.
E R$ 49,60.

3 **Fuvest** Na figura adiante, têm-se um cilindro circular reto, onde A e B são os centros das bases e C é um ponto da intersecção da superfície lateral com a base inferior do cilindro. Se D é o ponto do segmento $\overline{BC}$, cujas distâncias a $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ são ambas iguais a *d*, obtenha a razão entre o volume do cilindro e sua área total (área lateral somada com as áreas das bases), em função de *d*.

4 **IFCE 2016** Dentre todos os retângulos de perímetro P = 40 cm, iremos rotacionar o de área máxima em torno de um de seus lados, gerando um cilindro. O volume desse cilindro, em cm^3, é

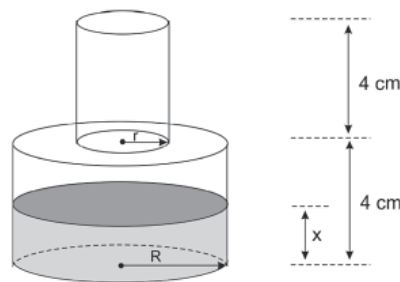
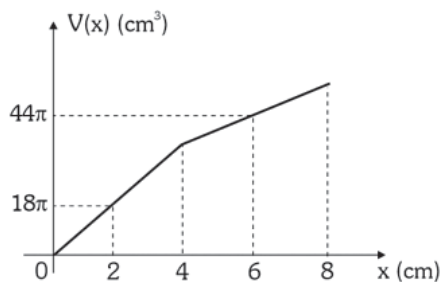
A 500π.
B 25π.
C 50π.
D 100π.
E 1000π.

5 **Enem** Dona Maria, diarista na casa da família Teixeira, precisa fazer café para servir as vinte pessoas que se encontram numa reunião na sala. Para fazer o café, Dona Maria dispõe de uma leiteira cilíndrica e copinhos plásticos também cilíndricos.

Com o objetivo de não desperdiçar café, a diarista deseja colocar a quantidade mínima de água na leiteira para encher os vinte copinhos pela metade. Para que isso ocorra, Dona Maria deverá

A encher a leiteira até a metade, pois ela tem um volume 20 vezes maior que o volume do copo.
B encher a leiteira toda de água, pois ela tem um volume 20 vezes maior que o volume do copo.
C encher a leiteira toda de água, pois ela tem um volume 10 vezes maior que o volume do copo.
D encher duas leiteiras de água, pois ela tem um volume 10 vezes maior que o volume do copo.
E encher cinco leiteiras de água, pois ela tem um volume 10 vezes maior que o volume do copo.

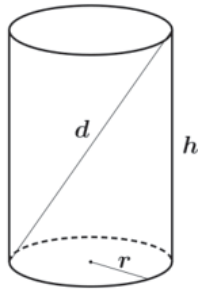
6 **Unicamp 2013** A embalagem de certo produto alimentício, em formato de cilindro circular, será alterada para acomodar um novo rótulo com informações nutricionais mais completas. Mantendo o mesmo volume da embalagem, a sua *área lateral* precisa ser aumentada. Porém, por restrições de custo do material utilizado, este aumento da área lateral não deve ultrapassar 25%. Sejam r e h o raio e a altura da embalagem original, e R e H o raio e a altura da embalagem alterada. Nessas condições podemos afirmar que:

A $\frac{R}{r} \geq \frac{3}{4}$ e $\frac{H}{h} \leq \frac{16}{9}$.
B $\frac{R}{r} \geq \frac{9}{16}$ e $\frac{H}{h} \leq \frac{4}{3}$.
C $\frac{R}{r} \geq \frac{4}{5}$ e $\frac{H}{h} \leq \frac{25}{16}$.
D $\frac{R}{r} \geq \frac{16}{25}$ e $\frac{H}{h} \leq \frac{5}{4}$.

7 **Fuvest** Uma garrafa de vidro tem a forma de dois cilindros sobrepostos. Os cilindros têm a mesma altura 4 cm e raios das bases R e r, respectivamente.

Se o volume V(x) de um líquido que atinge a altura x da garrafa se expressa segundo o gráfico a seguir, quais os valores de R e r?

8 **Enem PPL 2012** Uma prefeitura possui modelos de lixeira de forma cilíndrica, sem tampa, com raio medindo 10 cm e altura de 50 cm. Para fazer uma compra adicional, solicita à empresa fabricante um orçamento de novas lixeiras, com a mesma forma e outras dimensões. A prefeitura só irá adquirir as novas lixeiras se a capacidade de cada uma for, no mínimo, dez vezes maior que o modelo atual e seu custo unitário não ultrapassar R$ 20,00. O custo de cada lixeira é proporcional à sua área total e o preço do material utilizado na sua fabricação é de R$ 0,20 para cada 100 cm2. A empresa apresenta um orçamento discriminando o custo unitário e as dimensões, com o raio sendo o triplo do anterior e a altura aumentada em 10 cm. (Aproxime π para 3.)

O orçamento dessa empresa é rejeitado pela prefeitura, pois

A o custo de cada lixeira ficou em R$ 21,60.
B o custo de cada lixeira ficou em R$ 27,00.
C o custo de cada lixeira ficou em R$ 32,40.
D a capacidade de cada lixeira ficou 3 vezes maior.
E capacidade de cada lixeira ficou 9 vezes maior.

9 **Unicamp 2019** Seja um cilindro circular reto com raio da base de comprimento $r = 2$ cm e altura de comprimento h. Seja d a maior distância entre dois pontos desse cilindro, como ilustra a figura abaixo.

a) Supondo que o cilindro tenha volume igual a um litro, calcule sua área de superfície total.
b) Determine o valor de d no caso em que (r, h, d) seja uma progressão geométrica.

10 **Enem** Um fabricante de creme de leite comercializa seu produto em embalagens cilíndricas de diâmetro da base medindo 4 cm e altura 13,5 cm. O rótulo de cada uma custa R$ 0,60. Esse fabricante comercializará o referido produto em embalagens ainda cilíndricas de mesma capacidade, mas com a medida do diâmetro da base igual à da altura.
Levando-se em consideração exclusivamente o gasto com o rótulo, o valor que o fabricante deverá pagar por esse rótulo é de:

A R$ 0,20, pois haverá uma redução de $\frac{2}{3}$ na superfície da embalagem coberta pelo rótulo.
B R$ 0,40, pois haverá uma redução de $\frac{1}{3}$ na superfície da embalagem coberta pelo rótulo.
C R$ 0,60, pois não haverá alteração na capacidade da embalagem.
D R$ 0,80, pois haverá um aumento de $\frac{1}{3}$ na superfície da embalagem coberta pelo rótulo.
E R$ 1,00, pois haverá um aumento de $\frac{2}{3}$ na superfície da embalagem coberta pelo rótulo.

11 **PUC-Rio 2018** Considere a parábola de equação $y = 1 - x^2$. Para $x_0 \in [0, 1]$, inscrevemos, entre o eixo horizontal e a parábola, um retângulo de vértices $(x_0, 0)$, $(-x_0, 0)$, $(-x_0, y_0)$ e (x_0, y_0). Note que os dois vértices $(-x_0, y_0)$ e (x_0, y_0) pertencem à parábola.
Giramos o retângulo ao redor do eixo y, obtendo, assim, um cilindro circular reto.
a) Determine, em função de x_0, o raio da base, a altura e o volume do cilindro.
b) Calcule o volume do cilindro para $x_0 = \frac{2}{3}$.
c) Encontre o valor de x_0 para o qual o cilindro tem volume máximo. Determine este volume máximo.

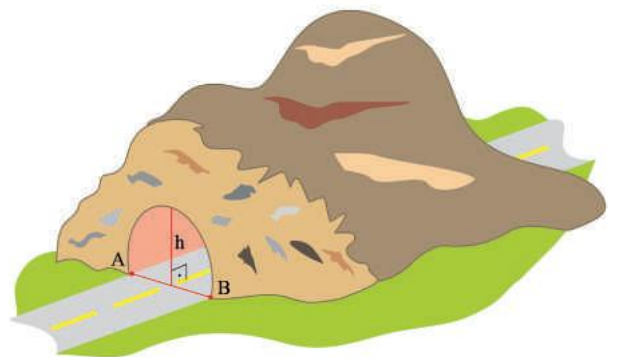
12 **UFU 2018** No Brasil, é comercializada, nos postos de combustível, a mistura do álcool anidro (etanol) com gasolina pura (gasolina A), conhecida como gasolina C. A proporção entre esses combustíveis é indicada pela porcentagem de etanol precedido pela letra E maiúscula. Dessa maneira, a mistura E10 é composta de 10% de etanol e 90% de gasolina A. As misturas mais comuns são E15, E20, E25 e E27.
Suponha-se que um tanque de uma distribuidora, na forma de um cilindro circular reto com 4 metros de diâmetro e capacidade de 120 000 litros, esteja com 100 000 litros da mistura E15. Suponha-se também que, devido a uma nova regulamentação da ANP (Agência Nacional do Petróleo), deva ser adicionado etanol nesse tanque de modo a obter a mistura E20, que passará a ser distribuída para comercialização.
Com base no texto apresentado, elabore e execute um plano de resolução de maneira a determinar
a) a quantidade de litros de etanol que serão adicionados a esse tanque.
b) o aumento, em metros, no nível de combustível (altura da coluna) nesse tanque.

Dado: Use $\pi = 3,125$.

13 **ITA 2014** Um cilindro reto de altura h = 1 cm tem sua base no plano xy definida por

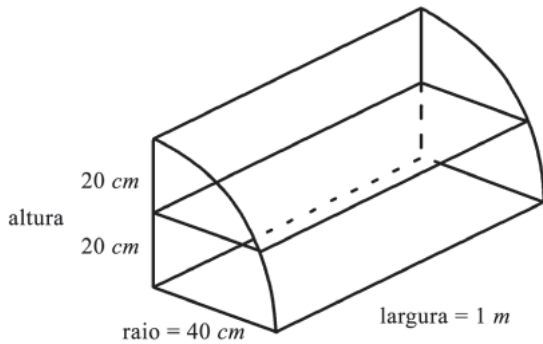
$$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 \leq 0$$

Um plano, contendo a reta $y - x = 0$ e paralelo ao eixo do cilindro, o secciona em dois sólidos. Calcule a área total da superfície do menor sólido.

14 **Unesp** Na construção de uma estrada retilínea foi necessário escavar um túnel cilíndrico para atravessar um morro. Esse túnel tem seção transversal na forma de um círculo de raio R seccionado pela corda $\overline{AB}$ e altura máxima h, relativa à corda, conforme figura.

Sabendo que a extensão do túnel é de 2000 m, que $AB = 4\sqrt{3}$ m e que $h = \frac{3R}{2} = 6$ m, determine o volume aproximado de terra, em m^3, que foi retirado na construção do túnel.

Dado: $\frac{\pi}{3} \cong 1,05$ e $\sqrt{3} \cong 1,7$.

FRENTE 3

15 **UEM 2015** A figura a seguir representa um expositor de salgados que consiste em 1/4 de um cilindro. Observe na figura que na metade da altura desse expositor existe uma prateleira que o divide em duas partes.

Considerando que a parte frontal do expositor corresponde à lateral do cilindro, assinale o que for **correto**. (Obs.: 1 litro = 1 decímetro cúbico)

01 A área da prateleira do meio é $\frac{\sqrt{3}}{5}$ m^2.

02 O volume da parte inferior do expositor (abaixo da prateleira) é $\frac{20}{3}\left(2\pi + 3\sqrt{3}\right)$ litros.

04 O volume do expositor é de 40π litros.

08 O volume da parte superior do expositor (acima da prateleira) é $\frac{20}{3}\left(2\pi - 3\sqrt{3}\right)$ litros.

16 A área da região frontal do expositor é $\frac{2\pi}{5}$ m^2.

Soma:

16 **ITA 2013** No sistema xOy os pontos A(2, 0), B(2, 5) e C(0, 1) são vértices de um triângulo inscrito na base de um cilindro circular reto de altura 8. Para este cilindro, a razão $\frac{\text{volume}}{\text{área total da superfície}}$, em unidade de comprimento, é igual a

A 1. B $\frac{100}{105}$. C $\frac{10}{11}$. D $\frac{100}{115}$. E $\frac{5}{6}$.

17 **ITA** Considere um cilindro circular reto, de volume igual a 360π cm^3, e uma pirâmide regular cuja base hexagonal está inscrita na base do cilindro. Sabendo que a altura da pirâmide é o dobro da altura do cilindro e que a área da base da pirâmide é de $54\sqrt{3}$ cm^2, então, a área lateral da pirâmide mede, em cm^2,

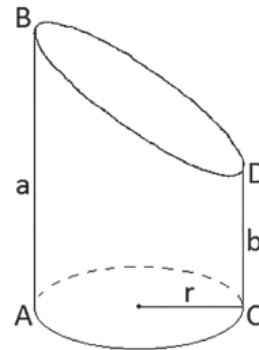
A $18\sqrt{427}$

B $27\sqrt{427}$

C $36\sqrt{427}$

D $108\sqrt{3}$

E $45\sqrt{427}$

18 **Unicamp** Um cilindro circular reto é cortado por um plano não paralelo à sua base, resultando no sólido ilustrado na figura. Calcule o volume desse sólido em termos do raio da base r, da altura máxima AB = a e da altura mínima CD = b. Justifique seu raciocínio.

19 **ITA** Um cilindro circular reto é seccionado por um plano paralelo ao seu eixo. A secção fica a 5 cm do eixo e separa na base um arco de 120°. Sendo de $30\sqrt{3}$ cm^2 a área da secção plana retangular, então o volume da parte menor do cilindro seccionado mede, em cm^3:

A $30\pi - 10\sqrt{3}$

B $30\pi - 20\sqrt{3}$

C $20\pi - 10\sqrt{3}$

D $50\pi - 25\sqrt{3}$

E $100\pi - 75\sqrt{3}$

20 **ITA** O raio de um cilindro de revolução mede 1,5 m. Sabe-se que a área da base do cilindro coincide com a área da secção determinada por um plano que contém o eixo do cilindro. Então, a área total do cilindro, em m^2, vale

A $\frac{3\pi^2}{4}$

B $\frac{9\pi(2+\pi)}{4}$

C $\pi(2 + \pi)$

D $\frac{\pi^2}{2}$

E $\frac{3\pi(\pi+1)}{2}$

pialhovik/iStockphoto.com

Klebercordeiro/iStockphoto.com

andresr/iStockphoto.com

valeo5/iStockphoto.com

Evgeny Sergeev/iStockphoto.com

FRENTE 3

CAPÍTULO

15

Cones e esferas

Depois de estudar detalhadamente os cilindros, os próximos corpos redondos a serem estudados são os cones e as esferas.

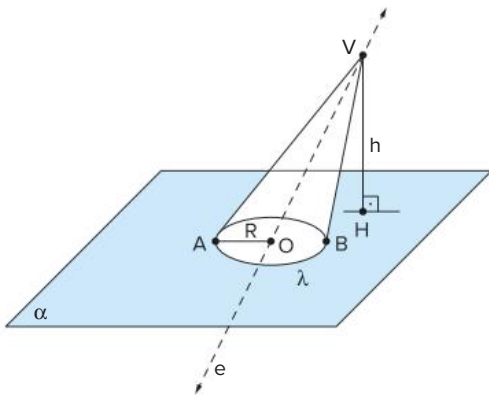
Embora existam diversas outras formas geométricas dotadas de superfícies curvas, essas duas em particular admitem relações métricas razoavelmente simples para serem abordadas no Ensino Médio, de modo que a capacidade de avaliar a extensão de suas superfícies e a grandeza de seus volumes é um assunto bastante cobrado nos principais vestibulares do país.

Afinal, essas formas são tão presentes em nosso cotidiano que podem ser encontradas em diversos objetos utilizados em situações como festas de aniversário ou confraternizações natalinas.

Cones circulares

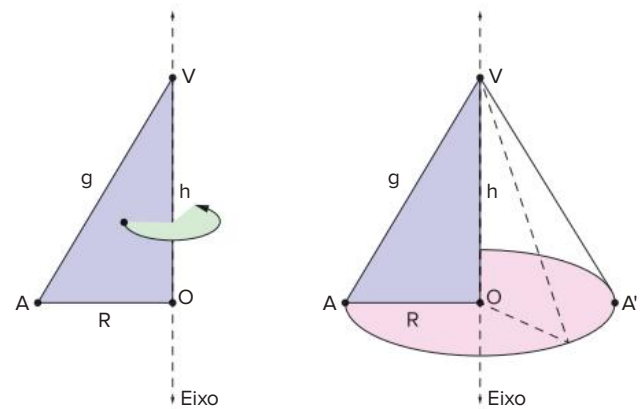
Entre os corpos redondos, o próximo sólido geométrico que estudaremos é o cone. Também bastante útil ao ser humano, ele dá forma a diversos objetos e utensílios domésticos, como podemos ver a seguir.

Formalmente, podemos definir um cone circular da seguinte maneira:

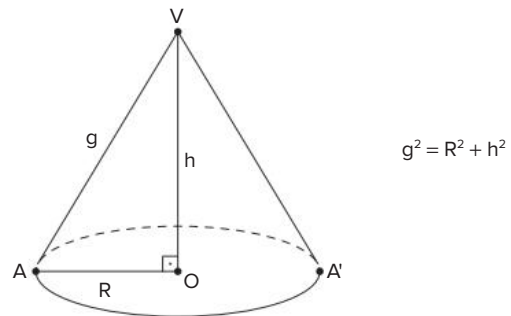
"Sejam α um plano, V um ponto fora de α e λ um círculo contido em α. Denomina-se cone de base circular a união de todos os segmentos de reta com uma extremidade em V e outra em λ."

Na figura, os principais elementos dos cones são:

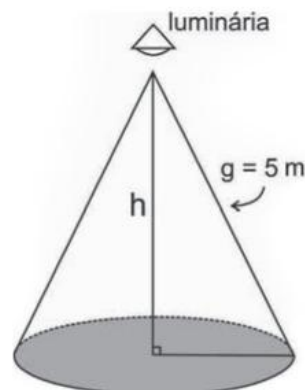
- o vértice do cone, que é o ponto V fora do plano α;
- a base do cone, que é o círculo λ, de diâmetro AB contido no plano α;
- o centro dessa base, que é o ponto O;
- a medida R do raio da base;
- o eixo e do cone, que é a reta determinada pelos pontos V e O;
- a medida h da altura do cone, que é a distância do ponto V ao plano α;
- duas retas geratrizes opostas ($\overleftrightarrow{VA}$ e $\overleftrightarrow{VB}$).

Cone reto ou cone de revolução

Quando o eixo do cone é perpendicular ao plano da base, podemos dizer que trata-se de um cone reto, ou de revolução. Cones de revolução são obtidos por rotações completas de triângulos retângulos em torno de um de seus catetos.

Note que, em cones de revolução, todas as geratrizes têm o mesmo comprimento.

Sendo **g** o comprimento das geratrizes de um cone de revolução, uma relação métrica entre esse valor e os valores do raio da base do cone e sua altura pode ser enunciada a partir do teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo retângulo cuja revolução dá forma ao cone.

$$g^2 = R^2 + h^2$$

Exercício resolvido

1 **Enem** Um arquiteto está fazendo um projeto de iluminação de ambiente e necessita saber a altura que deverá instalar a luminária na figura:

Sabendo-se que a luminária deverá iluminar uma área circular de 28,26 m^2, considerando $\pi = 3,14$, a altura h será igual a:

A 3 m.
B 4 m.
C 5 m.
D 9 m.
E 16 m.

Resolução:

Sendo R a medida do raio da área iluminada, temos:

$$\pi R^2 = 28,26\ m^2$$

Considerando a aproximação sugerida, obtemos:

$$3,14 \cdot R^2 = 28,26\ m^2 \Leftrightarrow R^2 = 9\ m^2$$

Assim, como $h > 0$, de $g^2 = R^2 + h^2$, encontramos:

$$5^2 = 9 + h^2 \Leftrightarrow h^2 = 25 - 9 = 16 \therefore h = 4\ m$$

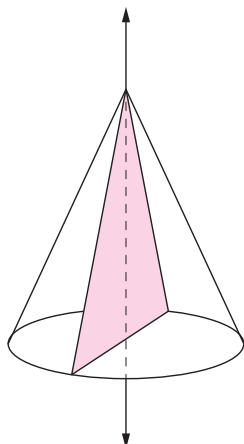
Alternativa: B

! Atenção

Cones circulares cujo eixo é oblíquo ao plano da base não podem ser gerados pela revolução de nenhuma forma geométrica. Cones como esses são chamados de cones oblíquos.

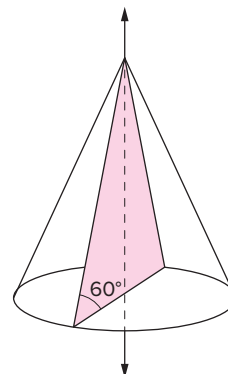
Seção meridiana

Da mesma forma que nos cilindros, as seções meri dianas de um cone são obtidas pela interseção deste com algum plano que contenha o seu eixo.

Nos cones de revolução, as seções meridianas são todas congruentes entre si e têm a forma de triângulos isósceles cuja base coincide com algum diâmetro da base do cone (2R) e cuja altura coincide com a altura do cone (h).

! Atenção

Em cones oblíquos, as seções meridianas não são triângulos congruentes uns aos outros.

Cone equilátero

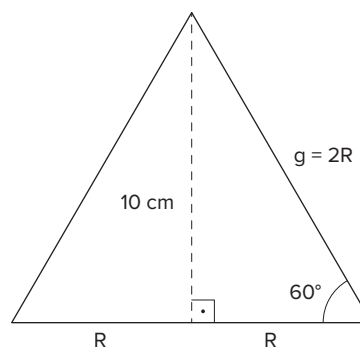
Se a seção meridiana de um cone de revolução for um triângulo equilátero, ou seja, se o diâmetro da base tiver a mesma medida que as geratrizes do cone, então o cone também receberá o nome de equilátero.

Em um cone equilátero, todas as geratrizes estão inclinadas 60° em relação ao plano da base. Além disso, as medidas das geratrizes e da altura podem ser expressas em função do raio da base por: $\begin{cases} g = 2R \\ h = R\sqrt{3} \end{cases}$

Exercício resolvido

2 Qual a área da seção meridiana de um cone equilátero cuja altura mede 10 cm?

A $50\sqrt{2}\ cm^2$.
B $100\sqrt{2}\ cm^2$.
C $\frac{50\sqrt{3}}{3}\ cm^2$.
D $\frac{100\sqrt{3}}{3}\ cm^2$.
E $\frac{100}{3}\ cm^2$.

Resolução:

A figura a seguir representa a seção meridiana desse cone:

No triângulo retângulo, $tg(60°) = \frac{10}{R} \Rightarrow R = \frac{10\sqrt{3}}{3}$ cm.

Assim, a área da seção é:

$$A_{seção} = \frac{2R \cdot h}{2} = R \cdot h = \frac{10\sqrt{3}}{3} \cdot 10 = \frac{100\sqrt{3}}{3}\ cm^2$$

Alternativa: D

FRENTE 3

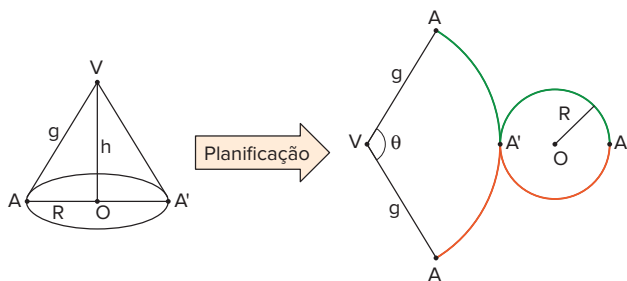
Áreas de um cone de revolução

Como a base de um cone de revolução é um círculo de raio R, a área da base de um cone é dada pela expressão:

$$A_{base} = \pi \cdot R^2$$

Além disso, o comprimento da circunferência dessa base é dado pela expressão:

$$C = 2\pi \cdot R$$

Observe que, ao desenvolver a superfície lateral de um cone de revolução, a figura obtida é a de um setor circular cujo raio coincide com a geratriz do cone.

Sendo θ a medida, em radianos, do ângulo central da planificação da superfície lateral de um cone de revolução e ℓ o comprimento do arco do setor circular que representa essa planificação, temos que:

$$\ell = \theta \cdot g$$

Como o arco desse setor corresponde ao comprimento de toda a circunferência da base do cone, a sentença $\ell = C$ implica uma importante relação métrica, própria dos cones de revolução:

$$\theta \cdot g = 2\pi \cdot R$$

Exercícios resolvidos

3 Qual a medida, em graus, do ângulo central da planificação da superfície lateral de um cone circular reto cujo raio da base mede 9 dm e a altura mede 12 dm?

A 330°　**C** 165°　**E** 90°
B 216°　**D** 144°

Resolução:

Para resolver esse problema, podemos, primeiro, descobrir a medida da geratriz do cone.

Então, de $g^2 = R^2 + h^2$, obtemos:

$$g^2 = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225 \text{ dm}^2$$

Como $g > 0$, vem que $g = +\sqrt{225} = 15$ dm.

Agora, de $\theta \cdot g = 2\pi \cdot R$, temos que:

$$\theta \cdot 15 = 2\pi \cdot 9 \Leftrightarrow \theta = \frac{18\pi}{15} = \frac{6\pi}{5} \text{ rad}$$

Convertendo a medida angular de radianos para graus, obtemos $\theta = \frac{6 \cdot 180°}{5} = 216°$.

Alternativa: B

4 Um pedaço de cartolina em forma de setor circular, com raio de 20 cm e ângulo central de 144°, foi cortado para montar a superfície lateral de um cone circular reto. Quanto esse cone terá de altura depois de montado?

A $8\sqrt{2}$ cm.　**C** $4\sqrt{7}$ cm.　**E** $4\sqrt{21}$ cm.
B $16\sqrt{2}$ cm.　**D** $8\sqrt{7}$ cm.

Resolução:

Em questões como essa, é importante observar que o raio do setor circular não é igual ao raio da base do cone, e sim igual à geratriz do cone. Assim, $g = 20$ cm.

Calculando θ em radianos, temos:

$$\left.\begin{array}{l} 180° \text{ —— } \pi \text{ rad} \\ 144° \text{ —— } \theta \text{ rad} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \theta = \frac{144°}{180°}\pi = \frac{4\pi}{5} \text{ rad}$$

Então, de $\theta \cdot g = 2\pi \cdot R$, obtemos:

$$\frac{4\pi}{5} \cdot 20 = 2\pi \cdot R \Rightarrow R = 8 \text{ cm}$$

Finalmente, de $g^2 = R^2 + h^2$, vem que:

$$20^2 = 8^2 + h^2,\ h > 0$$

$$h^2 = 400 - 64 = 336 \text{ cm}^2$$

Portanto, $h = \sqrt{336} = 4\sqrt{21}$ cm.

Alternativa: E

! Atenção

A área de um setor circular equivale à metade do produto do comprimento ℓ do arco de circunferência pelo comprimento r do raio:

$$A_{setor} = \frac{\ell \cdot r}{2}$$

Como o raio do setor circular que corresponde à planificação da superfície lateral do cone tem o comprimento da geratriz desse cone, a área lateral dos cones de revolução é expressa por:

$$A_{lateral} = \frac{\ell \cdot g}{2}$$

Da igualdade $\ell = 2\pi R$, podemos deduzir que:

$$A_{lateral} = \frac{2\pi \cdot R \cdot g}{2}$$

Simplificando a fração, concluímos que a área lateral de um cone de revolução pode ser expressa por:

$$A_{lateral} = \pi \cdot R \cdot g$$

Então, como os cones de revolução possuem apenas uma base, sua área total fica expressa por:

$$A_{total} = A_{lateral} + A_{base}$$

$$A_{total} = \pi \cdot R \cdot g + \pi \cdot R^2 = \pi R(g + R)$$

Exercício resolvido

5 Qual a área lateral de um cone de revolução cujo raio da base mede 4 cm e a altura mede 3 cm?

A 12π cm². C 16π cm². E 25π cm².
B 15π cm². D 20π cm².

Resolução:

Da relação $g^2 = R^2 + h^2$, temos $g^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$ cm².
Como $g > 0$, então $g = 5$ cm.
Dessa forma, a área lateral do cone mede:

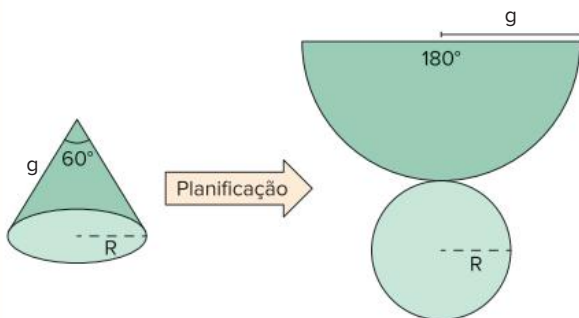
$$A_{lateral} = \pi \cdot R \cdot g = \pi \cdot 4 \cdot 5 = 20\pi \text{ cm}^2$$

Alternativa: D

Saiba mais

Uma relação entre a altura h de um cone equilátero e a medida θ do ângulo central da planificação de sua superfície lateral pode ser deduzida das expressões já estudadas:

$$\begin{cases} g = 2R \\ \theta \cdot g = 2\pi \cdot R \end{cases}$$

Substituindo o comprimento da geratriz na segunda equação, obtemos $\theta \cdot 2R = 2\pi \cdot R$. Portanto, $\theta = \pi$ rad.

Assim, é interessante observar que a planificação da superfície lateral de um cone equilátero é um semicírculo cujo raio coincide com a geratriz do cone.

Exercício resolvido

6 Se B, L e T são os respectivos valores da área da base de um cone equilátero, de sua área lateral e de sua área total, então:

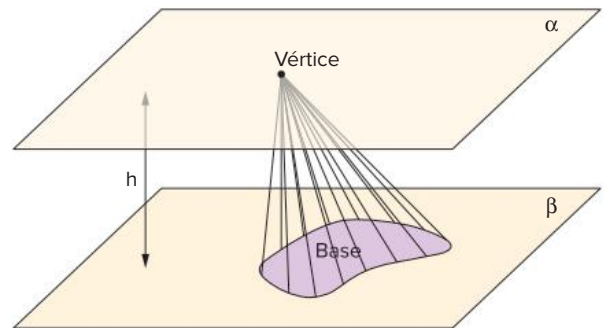
A $\frac{B}{1} = \frac{L}{2} = \frac{T}{3}$ C $\frac{B}{2} = \frac{L}{3} = \frac{T}{4}$ E $\frac{B}{1} = \frac{L}{4} = \frac{T}{5}$

B $\frac{B}{1} = \frac{L}{4} = \frac{T}{9}$ D $\frac{B}{2} = \frac{L}{3} = \frac{T}{5}$

Resolução:

A área da base de todo cone de revolução é $B = \pi \cdot R^2$.
Como, em cones equiláteros, $g = 2R$, a área lateral desse cone é $L = \pi \cdot R \cdot g = \pi \cdot R \cdot 2R = 2\pi \cdot R^2$.
E a área total é $T = B + L = \pi \cdot R^2 + 2\pi \cdot R^2 = 3\pi \cdot R^2$.
Portanto $\frac{B}{1} = \frac{L}{2} = \frac{T}{3}$.
Alternativa: A

Volume de um cone qualquer

Vimos, em capítulos anteriores, que o volume de uma pirâmide não depende do formato de sua base, mas sim do valor da área dessa base. Assim, entendendo os cones como pirâmides com bases curvilíneas, pelo princípio de Cavalieri, o volume de um cone equivale à terça parte do produto da área de sua base pelo comprimento de sua altura.

Na figura, se os planos α e β são paralelos, então a altura do cone é a distância entre esses planos, ou seja, h é a distância de α a β e, sendo B o valor da área da região indicada como base, o volume de sólidos como o representado pela figura fica expresso por:

$$V = \frac{B \cdot h}{3}$$

O sólido da figura anterior também é um tipo de cone, mas não um cone de revolução.

Vale lembrar que cones de revolução têm base circular. Desse modo, concluímos que o volume desses cones é expresso por:

$$V = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot h}{3}$$

Exercício resolvido

7 O volume de um cone cuja circunferência da base tem 18 m de comprimento e a altura mede 2π m é igual a:

A 27 m³. C 45 m³. E 81 m³.
B 36 m³. D 54 m³.

Resolução:

Do comprimento da base, obtemos $2\pi R = 18 \Leftrightarrow R = \frac{9}{\pi}$.
Portanto, o volume desse cone, em m³, é:

$$V = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot h}{3} = \frac{\pi}{3} \cdot \left(\frac{9}{\pi}\right)^2 \cdot 2\pi = \frac{2\pi^2}{3} \cdot \frac{81}{\pi^2} = 54$$

Alternativa: D

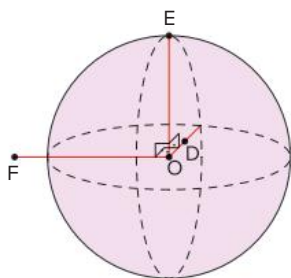
FRENTE 3

Esferas

Os próximos corpos redondos que estudaremos com maior profundidade são as esferas, que dão forma a inúmeros objetos manufaturados pelo homem, além de servirem como modelo para estudos do comportamento físico dos universos microscópico e macroscópico.

Pedro_Turrini/iStockphoto.com; mrtom-uk/iStockphoto.com; subjug/iStockphoto.com; leonello/iStockphoto.com; SlayStorm/iStockphoto.com; BlackJack3D/iStockphoto.com; Mutlu Kurtbas/iStockphoto.com

Formalmente, podemos definir uma esfera da seguinte maneira:

"Sejam O um ponto do espaço e R uma distância definida. Chamamos de esfera o conjunto formado por todos os pontos do espaço cujas distâncias até o ponto O sejam menores ou iguais a R."

Na figura da esfera, os elementos em destaque são:

- o centro da esfera, que é o ponto **O**;
- três eixos da esfera, que são as retas $\overleftrightarrow{OD}$, $\overleftrightarrow{OE}$ e $\overleftrightarrow{OF}$, perpendiculares duas a duas;
- três círculos máximos da esfera, situados em planos perpendiculares dois a dois;
- um ponto **D** da região interior da esfera;
- um ponto **E** da superfície da esfera;
- um ponto **F** da região exterior à esfera.

É importante observar que R não é o representante de determinado segmento de reta, mas de um valor numérico, que é o comprimento definido como distância ao centro da esfera. Assim, em relação aos pontos destacados na figura:

- Distância (D, O) $<$ R
- Distância (E, O) $=$ R
- Distância (F, O) $>$ R

O comprimento **R** que define a esfera é denominado **raio** da esfera. Assim, dizemos que a figura representa uma esfera de centro O e raio R.

Os círculos máximos de uma esfera também recebem o nome de meridianos da esfera.

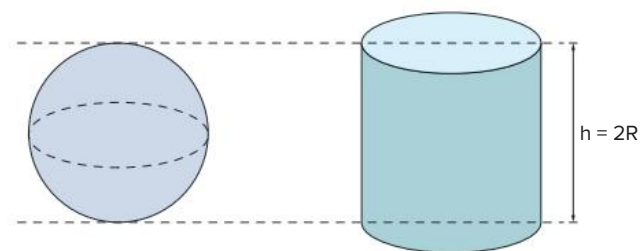
Todo círculo máximo de uma esfera tem o mesmo centro que a esfera.

Chamamos de diâmetro da esfera qualquer segmento de reta cujas extremidades são os pontos de interseção de dois meridianos da esfera.

Os diâmetros da esfera medem 2R, e o centro da esfera pertence a todos eles.

A descoberta de Arquimedes

Arquimedes de Siracusa foi um grande pensador da Antiguidade, e seus experimentos contribuíram muito tanto para os estudos da Matemática quanto para os da Física. Uma das conclusões mais impressionantes que tirou desses experimentos foi a relação entre volumes e áreas de duas formas geométricas em particular: a esfera e o cilindro equilátero.

Suas descobertas sobre a métrica desses corpos redondos só foram demonstradas muito posteriormente, quando o conhecimento matemático já incorporava o cálculo diferencial e integral, de modo que Arquimedes pode ser considerado um precursor dessa ciência.

De acordo com os experimentos de Arquimedes, se um cilindro equilátero e uma esfera têm o mesmo raio **R**, então a área da superfície total do cilindro é 50% maior que a área da superfície esférica. O mais impressionante é que, nessas condições, o volume do cilindro também é 50% maior que o volume da esfera.

$$\frac{\text{Superfície do cilindro}}{\text{Superfície da esfera}} = \frac{\text{Volume do cilindro}}{\text{Volume da esfera}} = 1{,}5$$

Superfície esférica

Vamos usar a relação de Arquimedes com o objetivo de deduzir uma expressão para a área da superfície esférica.

A área total de um cilindro de revolução é composta das áreas de sua superfície lateral e de suas duas bases circulares. Assim, sendo R e h as medidas do raio e da altura do cilindro, temos:

- $A_{lateral} = 2\pi Rh$
- $A_{base} = \pi R^2$
- $A_{total} = A_{lateral} + 2 \cdot A_{base} = 2\pi Rh + 2\pi R^2 = 2\pi R(h + R)$

Como se trata de um cilindro equilátero, h = 2R. Portanto:

- $A_{total} = 2\pi R(2R + R) = 2\pi R \cdot 3R = 6\pi R^2$

Então, da relação de Arquimedes para as áreas da superfície esférica e do cilindro equilátero, obtemos:

$$\frac{\text{Área do cilindro equilátero}}{\text{Área da superfície esférica}} = 1{,}5$$

$$\frac{6\pi R^2}{\text{Área da superfície esférica}} = \frac{3}{2}$$

$$3 \cdot (\text{Área da superfície esférica}) = 12\pi R^2$$

$$\text{Área da superfície esférica} = 4\pi R^2$$

Exercício resolvido

8 Qual a área aproximada da superfície de uma esfera com 80 cm de diâmetro?

A $1{,}8\ m^2$. **B** $1{,}9\ m^2$. **C** $2{,}0\ m^2$. **D** $2{,}1\ m^2$. **E** $2{,}2\ m^2$.

Resolução:

Do diâmetro da esfera, obtemos $2R = 80\ cm \Leftrightarrow R = 40\ cm$.
Assim, o valor exato de sua área é:

$$A = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot 40^2 = 6400\pi\ cm^2$$

Convertendo a unidade, encontramos:

$$A = 6400\pi \cdot (10^{-2}\ m)^2 = 6400 \cdot 10^{-4}\pi\ m^2 = 0{,}64\pi\ m^2$$

Com $\pi = 3{,}14$, temos o valor aproximado $A \cong 0{,}64 \cdot 3{,}14 \cong$ $\cong 2{,}0096\ m^2$.
Alternativa: C

Volume da esfera

Também vamos utilizar a relação de Arquimedes a fim de deduzir uma expressão para o volume da esfera.

O volume de um cilindro de revolução de raio R e altura h é dado por:

- $V_{cilindro} = \pi R^2 h$

Como se trata de um cilindro equilátero, h = 2R. Logo:

- $V_{cilindro} = \pi R^2 \cdot (2R) = 2\pi R^3$

Então, da relação de Arquimedes para os volumes da esfera e do cilindro equilátero, temos que:

$$\frac{\text{Volume do cilindro equilátero}}{\text{Volume da esfera}} = 1{,}5$$

$$\frac{2\pi R^3}{\text{Volume da esfera}} = \frac{3}{2}$$

$$3 \cdot (\text{Volume da esfera}) = 4\pi R^3$$

$$\text{Volume da esfera} = \frac{4\pi R^3}{3}$$

Exercícios resolvidos

9 Calcule o volume de uma esfera sabendo que sua superfície tem uma área de $324\pi\ cm^2$.

A $243\pi\ cm^3$. **B** $297\pi\ cm^3$. **C** $423\pi\ cm^3$. **D** $792\pi\ cm^3$. **E** $972\pi\ cm^3$.

Resolução:

Da área da superfície, obtemos $4\pi R^2 = 324\pi \Leftrightarrow R^2 = 81$.
Portanto, R = 9 e o volume dessa esfera, em cm^3, é:

$$V = \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{4\pi \cdot 9^3}{3} = \frac{4\pi \cdot 729}{3} = 4\pi \cdot 243 = 972\pi$$

Alternativa: E

10 Qual o número inteiro que mais se aproxima da medida, em centímetros, do raio interno de um recipiente esférico com capacidade de 1 litro? Utilize $\pi \cong 3$.

A 2 **B** 3 **C** 4 **D** 5 **E** 6

Resolução:

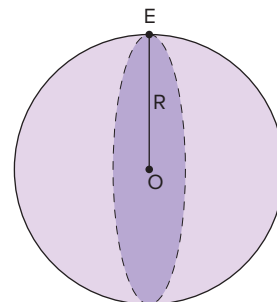
Como 1 litro equivale a $1000\ cm^3$, sendo R a medida, em centímetros, do raio dessa esfera, obtemos $\frac{4\pi R^3}{3} = 1000$.
Com $\pi \cong 3$, temos que, aproximadamente,

$$4R^3 \cong 1000 \Leftrightarrow R^3 \cong 250 \Leftrightarrow R \cong \sqrt[3]{250}$$

Então, como $\sqrt[3]{216} < \sqrt[3]{250} < \sqrt[3]{343}$, temos que R satisfaz 6 < R < 7, sendo 6 o inteiro que mais se aproxima da medida do raio.
Alternativa: E

Seção meridiana da esfera

Qualquer reta que passe pelo centro de uma esfera é também um eixo dela. Dessa forma, qualquer plano que passe pelo centro da esfera promove nela uma seção meridiana.

A circunferência de uma seção meridiana da esfera é chamada de meridiano da esfera.

A área da seção meridiana de uma esfera de raio R é igual a πR^2.

O comprimento dos meridianos de uma esfera de raio R é igual a $2\pi R$.

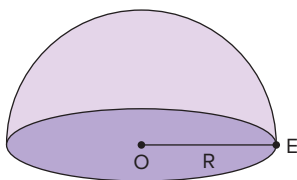
FRENTE 3

Hemisférios

Toda seção meridiana de uma esfera a divide em dois sólidos congruentes, denominados hemisférios. Assim, o volume de um hemisfério equivale à metade do volume de uma esfera de mesmo raio R.

$$\text{Volume do hemisfério} = \frac{1}{2} \cdot \text{(volume da esfera)}$$

$$\text{Volume do hemisfério} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi R^3}{3}$$

$$\text{Volume do hemisfério} = \frac{2\pi R^3}{3}$$

Os hemisférios são dotados de duas superfícies. Uma delas é plana, tem o formato de um círculo e pode ser considerada a base do hemisfério. A outra é curva e equivalente à metade da superfície de uma esfera. Logo, em um hemisfério de raio R, temos:

$$A_{plana} = \pi R^2$$
$$A_{curva} = 2\pi R^2$$

$$A_{total} = 3\pi R^2$$

Exercício resolvido

11 Um pedaço maciço de isopor com a forma de uma semiesfera tem volume igual a $2{,}25\pi$ dm^3 e terá sua superfície curva pintada para a decoração de uma festa infantil. Qual o valor da área a ser pintada nessa peça?

A $2{,}25\pi$ dm^2.
B $4{,}5\pi$ dm^2.
C $6{,}75\pi$ dm^2.
D 9π dm^2.
E $11{,}25\pi$ dm^2.

Resolução:

Como $2{,}25 = \frac{225}{100} = \frac{9}{4}$, temos:

$$V = \frac{2\pi R^3}{3} = \frac{9\pi}{4} \Leftrightarrow R^3 = \frac{27}{8} \Leftrightarrow R = \frac{3}{2} \text{ dm}$$

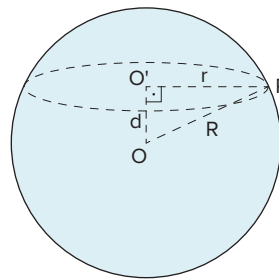
Portanto, a área que será pintada é igual a:

$$A = 2\pi R^2 = 2\pi\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{2}\pi = 4{,}5\pi \text{ dm}^2$$

Alternativa: B

Calota esférica

Se uma seção plana de uma esfera não passa pelo seu centro, então essa seção a divide em dois sólidos não equivalentes, denominados calotas da esfera.

Sendo R o raio da esfera secionada, a base de uma calota dessa esfera deve ser uma circunferência de raio r, tal que $r \leq R$.

Como a projeção ortogonal do centro O da esfera deve coincidir com o centro O' da base da calota, esses centros determinam, com qualquer ponto P da circunferência da base da calota, um triângulo retângulo POO', de hipotenusa PO = **R** e cateto PO' = **r**. Dessa forma, sendo **d** = OO' a distância entre os centros da esfera e da base da calota, do teorema de Pitágoras, obtemos:

$$R^2 = d^2 + r^2$$

O triângulo POO' não existe quando r = R, pois, nesse caso, O = O' e as calotas são também hemisférios.

Exercício resolvido

12 Uma esfera de raio R cm é secionada por um plano que está a 5 cm de distância do centro da esfera. Se a área da base das calotas obtidas é de 144π cm^2, então R é igual a:

A 10
B 11
C 12
D 13
E 14

Resolução:

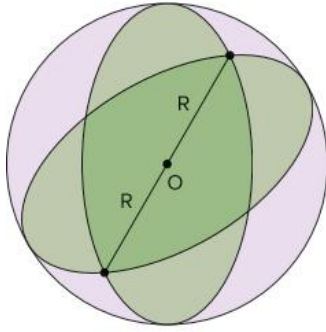
Da área da base da calota, obtemos $\pi r^2 = 144\pi \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow r = 12$ cm.

Da relação $R^2 = d^2 + r^2$, temos que $R^2 = 5^2 + 12^2 =$ $= 25 + 144 = 169$ cm^2.

Portanto, R = 13 cm.

Alternativa: D

Cunhas e fusos esféricos

Considere que duas seções meridianas de uma esfera de raio R determinem um diedro de medida θ. Nesse caso, a esfera ficará dividida em quatro sólidos geométricos denominados cunhas esféricas. Duas delas terão ângulo de medida θ; e as outras duas, o suplemento desse ângulo.

O volume de uma cunha esférica é diretamente proporcional à medida θ de seu diedro.

Assim, com θ em graus, encontramos:

$$\frac{V_{cunha}}{V_{esfera}} = \frac{\theta}{360^\circ}$$

$$V_{cunha} = \frac{\theta}{360^\circ} \cdot V_{esfera}$$

$$V_{cunha} = \frac{\theta}{360^\circ} \cdot \frac{4\pi R^3}{3}$$

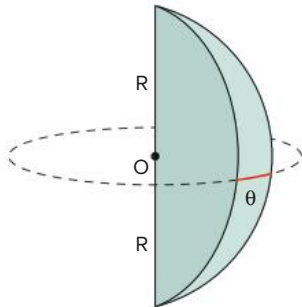
$$V_{cunha} = \frac{\theta \pi R^3}{270^\circ}$$

Com o ângulo, de medida θ, em radianos, temos:

$$\frac{V_{cunha}}{V_{esfera}} = \frac{\theta}{2\pi}$$

$$V_{cunha} = \frac{\theta}{2\pi} \cdot V_{esfera}$$

$$V_{cunha} = \frac{\theta}{2\pi} \cdot \frac{4\pi R^3}{3}$$

$$V_{cunha} = \frac{2}{3}\theta R^3$$

Cada cunha esférica é dotada de três superfícies: duas delas planas e equivalentes a semicircunferências de raio R, e uma curva, que é parte da superfície da esfera secionada.

A superfície curva de uma cunha esférica é denominada fuso esférico, e sua área é diretamente proporcional à medida θ de seu diedro.

Assim, com θ em graus, temos:

$$\frac{A_{fuso}}{A_{esfera}} = \frac{\theta}{360^\circ}$$

$$A_{fuso} = \frac{\theta}{360^\circ} \cdot A_{esfera}$$

$$A_{fuso} = \frac{\theta}{360^\circ} \cdot 4\pi R^2$$

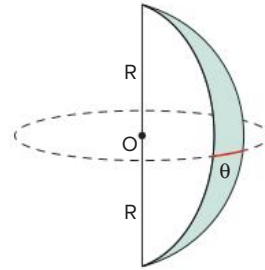
$$A_{fuso} = \frac{\theta \pi R^2}{90^\circ}$$

Com o ângulo, de medida θ, em radianos, obtemos:

$$\frac{A_{fuso}}{A_{esfera}} = \frac{\theta}{2\pi}$$

$$A_{fuso} = \frac{\theta}{2\pi} \cdot A_{esfera}$$

$$A_{fuso} = \frac{\theta}{2\pi} \cdot 4\pi R^2$$

$$A_{fuso} = 2\theta R^2$$

A área de toda a superfície de uma cunha esférica equivale à soma das áreas de suas duas faces planas e semicirculares com a área de seu fuso esférico:

$$A_{cunha} = 2 \cdot \frac{\pi \cdot R^2}{2} + 2\theta \cdot R^2$$

$$A_{cunha} = (\pi + 2\theta) \cdot R^2$$

Exercícios resolvidos

13 Qual o volume aproximado de uma cunha com 80° de uma esfera de raio 9 cm? Use $\pi \cong 3{,}14$.

A 680 cm³.
B 710 cm³.
C 750 cm³.
D 780 cm³.
E 810 cm³.

Resolução:

Solução 1

O volume de toda a esfera é:

$$V_{esfera} = \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{4\pi \cdot 9^3}{3} = 972\pi \text{ cm}^3$$

Logo:

$$\frac{V_{cunha}}{V_{esfera}} = \frac{80^\circ}{360^\circ} \Rightarrow V_{cunha} = \frac{2}{9} \cdot 972\pi = 216\pi \cong 678 \text{ cm}^3$$

FRENTE 3

Solução 2

Determinando o valor de θ, em radianos, temos:

$$\left.\begin{matrix} 180^\circ \text{ — } \pi \text{ rad} \\ 80^\circ \text{ — } \theta \text{ rad} \end{matrix}\right\rangle \Rightarrow \theta = \frac{80^\circ \pi}{180^\circ} = \frac{4\pi}{9}$$

Da fórmula do volume da cunha, obtemos:

$$V_{cunha} = \frac{2}{3}\theta R^3 = \frac{2}{3}\cdot\frac{4\pi}{9}\cdot 9^3 = 8\pi\cdot 27 = 216\pi \cong 678 \text{ cm}^3$$

Alternativa: A

14 Qual o valor do raio de uma cunha esférica de 90^o cuja área total é igual a 32π?

A 1
B 2
C 3
D 4
E 5

Resolução:

Como 90^o equivalem a $\frac{\pi}{2}$ radianos, da expressão para a área da cunha, obtemos:

$$A_{cunha} = (\pi + 2\theta)\cdot R^2 \Rightarrow 32\pi = \left(\pi + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right)\cdot R^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 32\pi = 2\pi \cdot R^2 \Leftrightarrow R^2 = 16$$

Como $R > 0$, temos que $R = 4$.

Alternativa: D

Inscrições e circunscrições

Esferas e outros sólidos geométricos podem estabelecer relações de inscrição e circunscrição de acordo com algumas normas. Em todos os casos:

- se um sólido está inscrito em uma esfera, então a esfera está circunscrita ao sólido;
- se uma esfera está inscrita em um sólido, então o sólido está circunscrito à esfera.

Um poliedro está inscrito em uma esfera se, e somente se, todos os vértices do poliedro pertencerem à superfície da esfera. Uma esfera está inscrita em um poliedro se, e somente se, a superfície da esfera tangencia todas as faces do poliedro.

Todos os poliedros regulares – tetraedros, hexaedros, octaedros, dodecaedros e icosaedros – são inscritíveis e circunscritíveis em/a esferas de mesmo centro.

Cilindros estão inscritos em esferas quando as circunferências de suas bases estão contidas na superfície da esfera. Esferas estão inscritas em cilindros quando a superfície da esfera tangencia as três superfícies do cilindro. Para que isso ocorra, o cilindro deve ser equilátero.

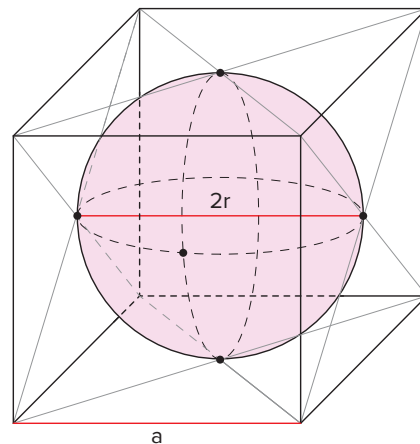
Cones estão inscritos em esferas quando seu vértice e todos os pontos da circunferência de sua base pertencem à superfície da esfera. Esferas estão inscritas em cones quando a superfície da esfera tangencia as duas superfícies do cone.

Paralelepípedos retangulares, prismas regulares e cilindros de revolução são inscritíveis em esferas, mas não necessariamente existem esferas às quais sejam cir cunscritíveis.

Pirâmides regulares e cones de revolução são inscritíveis e circunscritíveis em/a esferas.

Nos exemplos a seguir, indicaremos por **r** a medida do raio das esferas inscritas e por **R** a medida do raio das esferas circunscritas aos demais sólidos.

Esfera inscrita no cubo

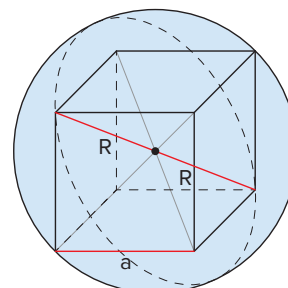
Quando uma esfera está inscrita em um cubo, o diâmetro da esfera tem a mesma medida que a aresta do cubo, pois a sua superfície tangencia as seis faces quadradas do cubo em seus respectivos centros, localizados na interseção de suas diagonais.

Sendo **r** a medida do raio da esfera e **a** medida da aresta do cubo circunscrito, temos:

Diâmetro da esfera = Aresta do cubo

$$2r = a$$

$$r = \frac{a}{2}$$

Esfera circunscrita ao cubo

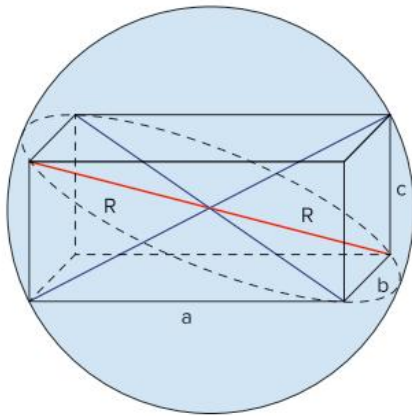
Quando uma esfera circunscreve um cubo, o diâmetro desta tem a mesma medida da diagonal do cubo, pois o centro deste, que é o ponto de interseção de suas dia gonais interiores, coincide com o centro da esfera. Assim, o raio da esfera deve medir o mesmo que a distância do centro do cubo a um de seus vértices.

Sendo **R** a medida do raio da esfera e **a** a medida da aresta do cubo inscrito, obtemos:

Diâmetro da esfera = Diagonal do cubo

$$2R = a\sqrt{3}$$

$$R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Esfera circunscrita ao paralelepípedo

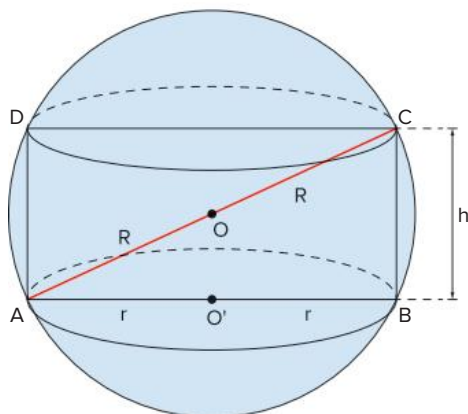
Quando uma esfera circunscreve um paralelepípedo retangular e reto, o diâmetro da esfera tem a mesma medida que a diagonal do paralelepípedo.

Sendo **a**, **b** e **c** as dimensões do paralelepípedo inscrito em uma esfera de raio **R**, temos:

Diâmetro da esfera = Diagonal do paralelepípedo

$$2R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{2}$$

Esfera circunscrita ao cilindro

Quando uma esfera circunscreve um cilindro de revolução, o diâmetro da esfera tem a mesma medida que a diagonal de uma seção meridiana do cilindro, pois toda seção meridiana do cilindro também será seção meridiana da esfera.

Se um retângulo ABCD for seção meridiana do cilindro, então sua diagonal AC, por exemplo, será diâmetro da esfera. Assim, do teorema de Pitágoras no triângulo ABC, temos que:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

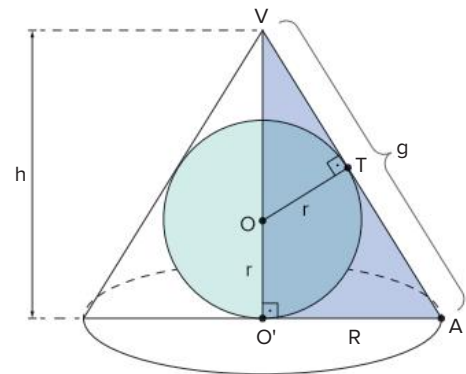
Desse modo, como AB é diâmetro da base e BC é altura do cilindro:

$$(2R)^2 = (2r)^2 + h^2$$
$$4R^2 = 4r^2 + h^2$$
$$R^2 = \frac{4r^2 + h^2}{4}$$

$$R = \frac{\sqrt{4r^2 + h^2}}{2}$$

Esfera inscrita no cone

Quando uma esfera está inscrita em um cone de revolução, ela tangencia cada geratriz do cone, além de tangenciar a base do cone exatamente no centro dessa base, e a distância entre os centros mencionados mede o mesmo que o raio da esfera.

Sendo O' o centro da base de um cone de vértice V circunscrito a uma esfera de centro O, temos que o ponto O pertence ao segmento VO', que é a altura do cone.

Então, considerando A um ponto da circunferência da base do cone e T o ponto da geratriz $\overline{VA}$ onde ocorre a tangência da superfície esférica com a superfície lateral do cone, os triângulos VOT e VAO' são semelhantes, pois possuem ângulos retos de vértices T e O', bem como o ângulo interno de vértice V em comum.

Dessa semelhança, vem que:

$$\frac{VO}{VA} = \frac{OT}{AO'} = \frac{VT}{VO'}$$

Não havendo interesse na medida do segmento $\overline{VT}$, descartamos a última fração dessa sentença, restando os segmentos que medem:

- a diferença entre a altura do cone e o raio da esfera inscrita: $VO = h - r$;
- um raio da esfera inscrita: $OT = r$;
- uma geratriz do cone: $VA = g$;
- um raio da base do cone: $AO' = R$.

Substituindo essas medidas na proporção que nos interessa entre as obtidas da semelhança de triângulos, encontramos:

$$\frac{h-r}{g}=\frac{r}{R}$$

$$r \cdot g=(h-r) \cdot R$$

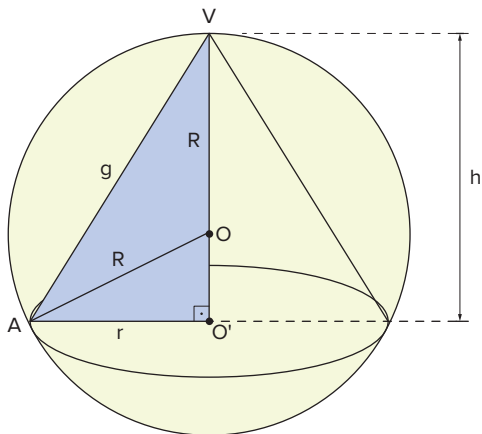
$$r \cdot g=h \cdot R-r \cdot R$$

$$r \cdot g+r \cdot R=h \cdot R$$

$$r \cdot(g+R)=h \cdot R$$

$$r=\frac{h \cdot R}{g+R}$$

Esfera circunscrita ao cone

Quando uma esfera está circunscrita a um cone de revolução, a projeção ortogonal do centro da esfera no plano da base do cone coincide com o centro dessa base, e a distância entre os centros mencionados mede a diferença absoluta entre o raio da esfera e a altura do cone.

Sendo A um ponto da circunferência da base de um cone de vértice V inscrito em uma esfera de centro O, temos que o centro O' da base do cone é vértice de um ângulo reto de lados AO' e OO'. Portanto, no triângulo retângulo AOO':

- AO é raio da esfera: AO = R;
- AO' é raio da base do cone: AO' = r;
- OO' mede a diferença absoluta entre a altura do cone e o raio da esfera: OO' = |h – R|.

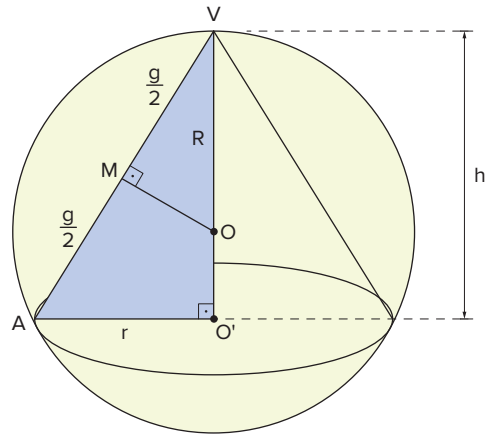
Então, do teorema de Pitágoras, obtemos:

$$R^2 = r^2 + |h - R|^2$$

$$R^2 = r^2 + h^2 \quad 2hR + R^2$$

$$2hR = r^2 + h^2$$

$$R=\frac{r^2+h^2}{2h}$$

Além disso, sendo M o ponto médio da geratriz $\overline{VA}$ do cone, temos que os triângulos OVM e AVO' são semelhantes, pois possuem ângulos retos de vértices M e O' e o ângulo interno de vértice V em comum.

Dessa semelhança, vem que:

$$\frac{VM}{VO'}=\frac{VO}{VA}=\frac{MO}{AO'}$$

Não havendo interesse na medida do segmento $\overline{MO}$, descartamos a última fração dessa sentença, restando os segmentos que medem:

- a metade de uma geratriz do cone: $VM=\frac{g}{2}$;
- um raio da esfera circunscrita: VO = R;
- a altura do cone: VO' = h;
- uma geratriz do cone: VA = g.

Substituindo essas medidas na proporção que nos interessa entre as obtidas da semelhança de triângulos, temos:

$$\frac{\frac{g}{2}}{h}=\frac{R}{g}$$

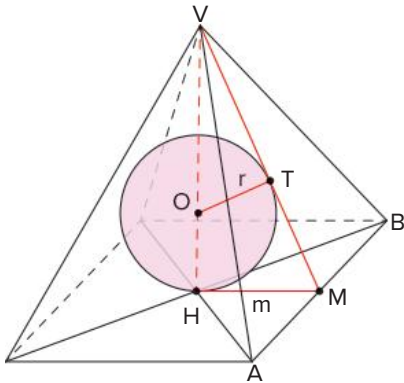
$$h \cdot R=\frac{g}{2} \cdot g$$

$$R=\frac{g^2}{2h}$$

Finalmente, observando a relação métrica $g^2 = r^2 + h^2$ entre as medidas da geratriz, do raio da base e da altura de um cone de revolução, podemos perceber que as duas expressões obtidas para o raio da esfera circunscrita a esse cone se equivalem.

Esfera inscrita na pirâmide regular

Quando uma esfera está inscrita em uma pirâmide regular, a projeção ortogonal do centro da esfera no plano da base da pirâmide coincide com o centro dessa base e a distância entre os centros mencionados mede o mesmo que o raio da esfera. Além disso, cada ponto em que a esfera tangencia uma face lateral da pirâmide pertence ao apótema da pirâmide contido nessa face.

Embora a figura a seguir apresente uma esfera inscrita em uma pirâmide quadrangular regular, os resultados obtidos desse estudo são válidos para qualquer tipo de pirâmide regular.

Considerando o ponto médio M de uma aresta $\overline{AB}$ da base da pirâmide de altura $\overline{VH}$ e o ponto de tangência T da esfera de centro O com a face lateral VAB, os triângulos VOT e VMH são semelhantes, pois possuem ângulos retos de vértices T e H, bem como o ângulo interno de vértice V em comum.

Dessa semelhança, vem que:

$$\frac{VO}{VM} = \frac{OT}{HM} = \frac{VT}{VH}$$

Não havendo interesse na medida do segmento $\overline{VT}$, descartamos a última fração dessa sentença, restando os segmentos que medem:

- a diferença entre a altura da pirâmide e o raio da esfera: $VO = h - r$;
- um raio da esfera inscrita: $OT = r$;
- um apótema lateral da pirâmide: $VM = g$;
- um apótema da base da pirâmide: $HM = m$.

Substituindo essas medidas na proporção que nos interessa entre as obtidas da semelhança de triângulos, temos:

$$\frac{h-r}{g} = \frac{r}{m}$$

$$r \cdot g = (h-r) \cdot m$$

$$r \cdot g = h \cdot m - r \cdot m$$

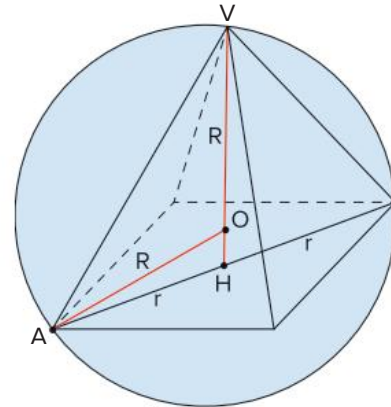
$$r \cdot g + r \cdot m = h \cdot m$$

$$r \cdot (g+m) = h \cdot m$$

$$r = \frac{h \cdot m}{g+m}$$

Esfera circunscrita a uma pirâmide regular

Quando uma esfera circunscreve uma pirâmide regular, a projeção ortogonal do centro da esfera no plano da base da pirâmide também coincide com o centro dessa base e a distância entre os centros mencionados mede a diferença absoluta entre o raio da esfera e a altura da pirâmide.

Novamente, embora a figura a seguir apresente uma pirâmide quadrangular regular inscrita em uma esfera, os resultados obtidos desse estudo são válidos para qualquer tipo de pirâmide regular.

O centro O da esfera circunscrita à pirâmide pertence à reta determinada pela altura $\overline{VH}$ da pirâmide. Assim, sendo A um dos vértices da base da pirâmide, temos que AOH é um triângulo retângulo no ponto H:

- $\overline{AO}$ é raio da esfera: $AO = R$;
- $\overline{AH}$ é raio da circunferência circunscrita à base da pirâmide: $AH = r$;
- $\overline{OH}$ mede a diferença absoluta entre a altura da pirâmide e o raio da esfera: $OH = |h - R|$.

  Então, do teorema de Pitágoras, obtemos:

$$R^2 = r^2 + |h - R|^2$$

$$R^2 = r^2 + h^2 - 2hR + R^2$$

$$2hR = r^2 + h^2$$

$$R = \frac{r^2 + h^2}{2h}$$

Tetraedro regular e suas esferas inscrita e circunscrita

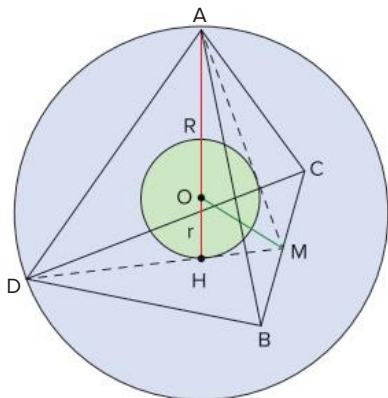
Os tetraedros regulares são poliedros inscritíveis e circunscritíveis em/a circunferências de mesmo centro e a soma das medidas dos raios dessas esferas coincide com o comprimento da altura do tetraedro.

$$R + r = h$$

Sendo ℓ a medida da aresta de um tetraedro regular, temos que:

- o raio de sua esfera inscrita é dado por: $r = \frac{\ell\sqrt{6}}{12}$;
- o raio de sua esfera circunscrita é dado por: $R = \frac{\ell\sqrt{6}}{4}$.

Demonstrações

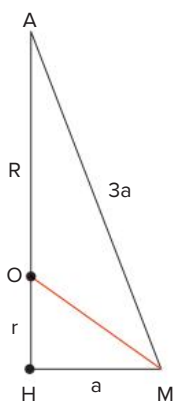
Seja ABCD um tetraedro regular em que $\overline{AH}$ é uma de suas alturas.

O centro da esfera inscrita no tetraedro e da circunscrita a ele é um ponto O que pertence à altura $\overline{AH}$ da pirâmide, de modo que:

- $\overline{OH}$ é um raio da esfera inscrita: $OH = r$;
- $\overline{OA}$ é um raio da esfera circunscrita: $OA = R$.

Como as faces desse poliedro regular são triângulos equiláteros congruentes, sendo M o ponto médio da aresta $\overline{BC}$, temos $DM = AM$. Além disso, como o ponto H é baricentro da base BCD, do teorema do baricentro, obtemos $DH = 2 \cdot HM$.

Então, sendo a o comprimento do apótema da base $\overline{HM}$ dessa pirâmide, temos:

- $HM = a$;
- $DH = 2a$;
- $AM = DM = 3a$.

Vamos agora observar algumas características do triângulo retângulo AHM:

Como o ponto O também é incentro do tetraedro, concluímos que o segmento $\overline{OM}$ é bissetriz interna do triângulo AMH. Então, do teorema da bissetriz, obtemos:

$$\frac{OA}{OH} = \frac{AM}{HM} \Rightarrow \frac{R}{r} = \frac{3a}{a} \Leftrightarrow R = 3r$$

Portanto, em função do comprimento a, a altura desse tetraedro é:

$$h = R + r = 3r + r = 4r$$

Como $h = \frac{\ell\sqrt{6}}{3}$ expressa, de forma racionalizada, a altura de um tetraedro regular de aresta ℓ, temos:

$$4r = \frac{\ell\sqrt{6}}{3} \Rightarrow r = \frac{\ell\sqrt{6}}{12}$$

$$R = 3r \Rightarrow R = \frac{\ell\sqrt{6}}{4}$$

Octaedro regular e suas esferas inscrita e circunscrita

Os octaedros regulares também são poliedros inscritíveis e circunscritíveis em/a circunferências de mesmo centro.

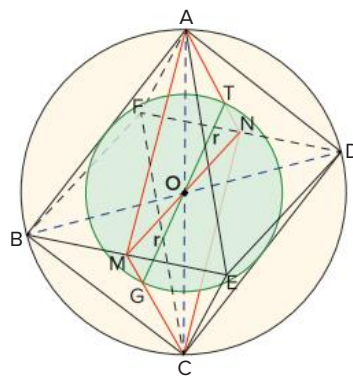
Sendo ℓ a medida da aresta de um octaedro regular, temos que:

- o raio da esfera inscrita é dado por: $r = \frac{\ell\sqrt{6}}{6}$;
- o raio da esfera circunscrita é dado por: $R = \frac{\ell\sqrt{2}}{2}$.

Demonstrações

Seja ABCDEF um octaedro regular de aresta ℓ. O centro das esferas inscrita e circunscrita é o ponto O de encontro das diagonais $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ e $\overline{EF}$ do octaedro.

Como as diagonais do octaedro são diâmetros da esfera que o circunscreve, então $R = \frac{d}{2}$.

Cada diagonal de um octaedro também é diagonal de um quadrado de lado ℓ, por exemplo, BEDF. Desse modo, concluímos que $R = \frac{\ell\sqrt{2}}{2}$.

A dedução da expressão para o raio da esfera inscrita é mais trabalhosa.

Tomando os pontos médios M e N de arestas opostas do octaedro como $\overline{BE}$ e $\overline{FD}$, por exemplo, fica determinado o losango AMCN, que contém uma seção meridiana da esfera inscrita.

A diagonal menor $\overline{MN}$ desse losango equivale à aresta do octaedro: $MN = \ell$.

O centro das esferas é ponto médio dessa diagonal $\overline{MN}$: $OM = ON = \frac{\ell}{2}$.

Os lados do losango AMCN são alturas dos triângulos equiláteros que cercam o poliedro. Assim:

$$AM = AN = CM = CN = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

Os pontos G e T, em que a esfera tangencia as faces ADF e BCE do octaedro, são os baricentros desses triângulos equiláteros. Portanto, do teorema do baricentro, obtemos $GM = TN = \frac{1}{3} \cdot \frac{\ell\sqrt{3}}{2} = \frac{\ell\sqrt{3}}{6}$.

O segmento $\overline{GT}$ é um diâmetro da esfera de raio r. Então, OG = OT = r.

Observando que MGO e NTO são triângulos retângulos nos vértices G e T respectivamente, uma vez que esses também são os pontos de tangência da esfera com o losango AMCN, do teorema de Pitágoras em MGO, temos que:

$$OM^2 = GM^2 + OG^2$$

$$\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \left(\frac{\ell\sqrt{3}}{6}\right)^2 + r^2$$

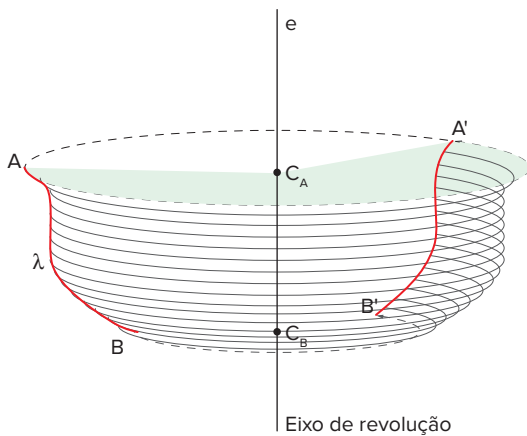
$$\frac{\ell^2}{4} = \frac{3\ell^2}{36} + r^2$$

$$r^2 = \frac{\ell^2}{4} - \frac{3\ell^2}{36} = \frac{9\ell^2 - 3\ell^2}{36} = \frac{6\ell^2}{36}$$

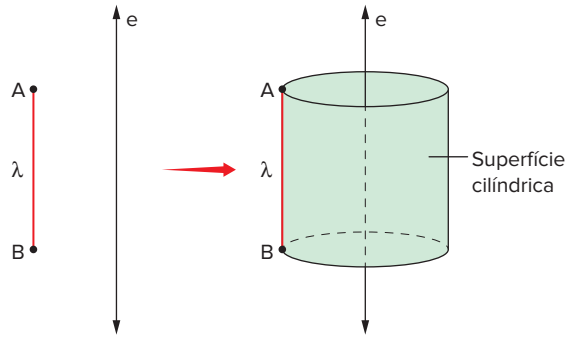
Portanto, $r = \frac{\ell\sqrt{6}}{6}$.

Sólidos de revolução

Chamamos de superfície de revolução aquela obtida pela rotação de uma linha plana λ, denominada geratriz, em torno de uma reta, a qual recebe o nome de eixo de revolução. Essa transformação geométrica espacial ocorre de modo que cada ponto de λ gire em torno de sua projeção ortogonal no eixo e.

Na figura, as extremidades A e B da curva λ giram, respectivamente, em torno dos pontos C_A e C_B, que determinam o eixo de revolução. Além disso, cada ponto do comprimento de λ gira em torno de um ponto diferente do segmento $\overline{C_AC_B}$.

As superfícies de revolução são compostas das circunferências determinadas pelas trajetórias de cada ponto da curva geratriz AB durante sua revolução em torno do eixo indicado na figura.

Chamamos de sólidos de revolução toda porção do espaço que pode ser cercada por uma superfície de revolução. Eles podem ser cilindros, cones ou esferas, além de muitos outros formatos que não foram estudados neste capítulo. O formato de um sólido de revolução depende do formato de sua geratriz λ, de sua superfície curva e da posição dessa geratriz em relação ao eixo de revolução.

Um sólido de revolução será cilíndrico quando for gerado por um segmento de reta paralelo ao eixo de revolução. Desse modo, cada ponto do segmento $\overline{AB}$ descreve uma trajetória circular cujo raio será o mesmo da base do cilindro.

Um sólido de revolução será cônico quando for gerado por um segmento de reta oblíquo ao eixo e com uma de suas extremidades sobre este. Desse modo, os pontos do segmento $\overline{AB}$ descrevem trajetórias circulares com diferentes raios, e o círculo descrito pela extremidade não pertencente ao eixo, tendo o mesmo raio que a base do cone.

Um sólido de revolução será esférico se for gerado por uma semicircunferência $\overset{\frown}{AB}$ com as extremidades situadas sobre o eixo de revolução. Desse modo, da semicircunferência $\overset{\frown}{AB}$, são descritas trajetórias circulares com diferentes raios, e o círculo descrito pelo ponto médio M do arco AB tem o mesmo raio que a esfera gerada.

FRENTE 3

Exercícios resolvidos

15 **Enem 2011** A figura seguinte mostra um modelo de sombrinha muito usado em países orientais.

Disponível em: http://mdmat.psico.ufrgs.br. Acesso em: 1 maio 2010.

Essa figura é uma representação de uma superfície de revolução chamada de

A pirâmide.
B semiesfera.
C cilindro.
D tronco de cone.
E cone.

Resolução:

Considerando a seguinte sequência de figuras:

Podemos afirmar que a figura (a sombrinha) é o modelo de um cone.
Assim sendo, a figura (com as suas possíveis imperfeições) representa uma ideia (perfeita) da superfície lateral de um cone de revolução.
Alternativa: E

16 A figura a seguir apresenta um triângulo isósceles ABF com 6 cm de base e 4 cm de altura, um retângulo BCEF com 8 cm de altura e um semicírculo de diâmetro BF.

Uma peça automotiva de alumínio será construída com a forma do sólido gerado pela revolução dessa figura em torno do seu eixo de simetria. Determine:

a) a medida da altura $\overline{AD}$ desse sólido.
b) o volume total do sólido.
c) a área da superfície total do sólido.

Resolução:

a) Sendo N o ponto médio do segmento $\overline{BF}$, a altura do sólido será:

$$AD = AN + NM + MD$$

- $\overline{AN}$ é a altura do triângulo ABF: AN = 4 cm;
- $\overline{NM}$ é a altura do retângulo BCEF: NM = 8 cm;
- $\overline{MD}$ é raio do semicírculo: $MD = \frac{1}{2} \cdot CE = 3$ cm.

Logo, AD = 4 + 8 + 3 = 15 cm.

b) O volume do cone gerado pela revolução do triângulo ABF é:

$$V_{cone} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot 4 = 12\pi \text{ cm}^3$$

O volume do cilindro gerado pela revolução do retângulo BCEF é:

$$V_{cilindro} = \pi \cdot 3^2 \cdot 8 = 72\pi \text{ cm}^3$$

O volume do hemisfério gerado pela revolução do semicírculo é:

$$V_{hemisfério} = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot 3^3 = 18\pi \text{ cm}^3$$

Portanto, o volume total do sólido será:

$$V_{total} = V_{cone} + V_{cilindro} + V_{hemisfério} = 12\pi + 72\pi + 18\pi = 102\pi \text{ cm}^3$$

c) Como o sólido não possui bases, sua área total equivale à soma das áreas laterais do cone, do cilindro e do hemisfério. Sendo g a medida da geratriz do cone, do teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ABN, obtemos:

$$g^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow g = 5 \text{ cm}$$

A área lateral do cone vale:

$$A_{lateral\ do\ cone} = \pi \cdot 3 \cdot 5 = 15\pi \text{ cm}^2$$

A área lateral do cilindro vale:

$$A_{lateral\ do\ cilindro} = 2\pi \cdot 3 \cdot 8 = 48\pi \text{ cm}^2$$

A área da superfície curva do hemisfério vale:

$$A_{hemisfério} = \frac{1}{2} \cdot 4\pi \cdot 3^2 = 18\pi \text{ cm}^2$$

Portanto, a área total do sólido será:

$$A_{total} = 15\pi + 48\pi + 18\pi = 81\pi \text{ cm}^2$$

Revisando

Texto para as questões de **1** a **10**.

Três sólidos geométricos foram impressos em resina por uma impressora 3D: um cilindro circular reto, um cone circular reto e uma esfera.

Além de os sólidos impressos terem a mesma altura, todos os raios medem 6 cm.

1 Quanto mede a altura dos sólidos?

A 6 cm.
B 8 cm.
C 10 cm.
D 12 cm.
E 18 cm.

2 Em relação aos volumes desses sólidos, é correto afirmar que:

A $V_{cilindro} = V_{cone} + V_{esfera}$
B $V_{cilindro} = V_{cone} - V_{esfera}$
C $V_{cilindro} = 2 \cdot V_{cone} + V_{esfera}$
D $V_{cilindro} = 3 \cdot V_{cone} - 2 \cdot V_{esfera}$
E $V_{cilindro} = 4 \cdot V_{cone} - 3 \cdot V_{esfera}$

3 Qual a razão entre os volumes do cilindro e do cone?

A 1,0
B 1,5
C 2,0
D 2,5
E 3,0

4 Qual a razão entre os volumes da esfera e do cone?

A 1,0
B 1,5
C 2,0
D 2,5
E 3,0

5 Qual a razão entre os volumes do cilindro e da esfera?

A 1,0
B 1,5
C 2,0
D 2,5
E 3,0

6 Qual o comprimento da geratriz do cone impresso?

A 18 cm.
B 12 cm.
C $3\sqrt{10}$ cm.
D $5\sqrt{6}$ cm.
E $6\sqrt{5}$ cm.

7 Considerando $\pi \cong 3{,}1$ e $\sqrt{5} \cong 2{,}2$, a área lateral do cone impresso mede, aproximadamente:

A 150 cm^2.
B 175 cm^2.
C 218 cm^2.
D 245 cm^2.
E 275 cm^2.

8 Calcule, sem aproximações, a área da superfície total de cada sólido.

9 Qual a razão entre as áreas totais do cilindro e da esfera?

A 1,0 B 1,5 C 2,0 D 2,5 E 3,0

10 Sendo θ a medida, em radianos, do ângulo central da planificação da superfície lateral do cone impresso, então $\frac{\theta}{\pi}$ é igual a:

A $\frac{2\sqrt{10}}{5}$ B $\frac{5\sqrt{10}}{2}$ C $\frac{10\sqrt{5}}{7}$ D $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ E $\frac{\sqrt{5}}{5}$

11 Enem 2012 O globo da morte é uma atração muito usada em circos. Ele consiste em uma espécie de jaula em forma de uma superfície esférica feita de aço, onde motoqueiros andam com suas motos por dentro. A seguir, tem-se, na Figura 1, uma foto de um globo da morte e, na Figura 2, uma esfera que ilustra um globo da morte.

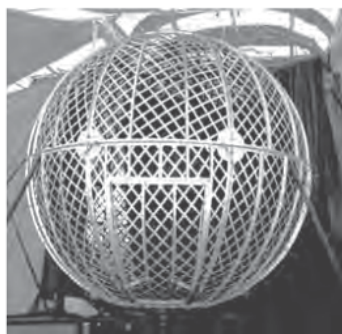
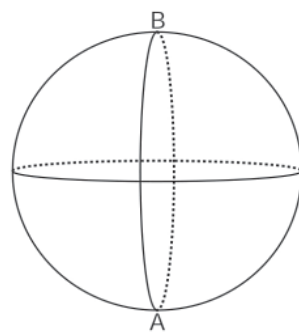
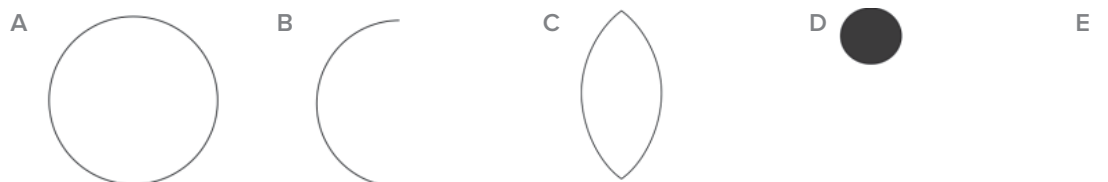
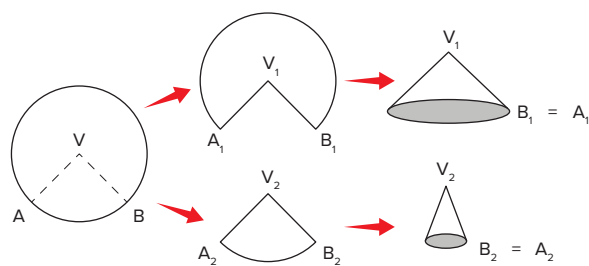



Figura 1 Figura 2

Na Figura 2, o ponto A está no plano do chão onde está colocado o globo da morte e o segmento $\overline{AB}$ passa pelo centro da esfera e é perpendicular ao plano do chão. Suponha que há um foco de luz direcionado para o chão colocado no ponto B e que um motoqueiro faça um trajeto dentro da esfera, percorrendo uma circunferência que passa pelos pontos A e B.

Disponível em: <www.baixaki.com.br>. Acesso em: 29 fev. 2012.

A imagem do trajeto feito pelo motoqueiro no plano do chão é melhor representada por

A
B
C
D
E

12 Um pedaço de cartolina circular foi cortado em dois setores, os quais foram usados para formar superfícies laterais de dois cones circulares abertos.
Observe, no esquema a seguir, que os cortes feitos no círculo de cartolina seguiram as linhas determinadas pelos raios $\overline{VA}$ e $\overline{VB}$ e as superfícies cônicas foram obtidas fazendo-se coincidir os pontos das extremidades A e B de cada setor circular.

Determine a razão entre as áreas das bases dos cones de vértices V_1 e V_2 sabendo que os segmentos $\overline{VA}$ e $\overline{VB}$ foram cortados de forma perpendicular um ao outro.

A 3 **B** 4 **C** 6 **D** 8 **E** 9

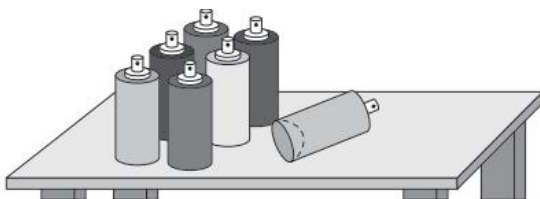
13 **Uerj** Três bolas de tênis, idênticas, de diâmetro igual a 6 cm, encontram-se dentro de uma embalagem cilíndrica, com tampa. As bolas tangenciam a superfície interna da embalagem nos pontos de contato, como ilustra a figura ao lado.

Calcule:

a) a área total, em cm^2, da superfície da embalagem;

b) a fração do volume da embalagem ocupado pelas bolas.

14 Três seções meridianas de uma esfera, com 60 cm de diâmetro, dividem-na no maior número de pedaços congruentes. Esboce uma figura que represente o formato de um desses pedaços e calcule os valores de seu volume e de sua área total.

15 Uma lata de tinta *spray* tem o formato de um cilindro com 10 cm de altura, e sua base circular possui 6 cm de diâmetro.

O fundo da lata apresenta uma concavidade semiesférica que fortalece sua estrutura, pois, se a lata tivesse um fundo plano, a força do gás poderia empurrar o metal para fora. Além disso, esse formato facilita o uso do produto até a última gota. Considerando que o diâmetro da concavidade seja o mesmo que o da base do cilindro, podemos estimar o volume dessa lata em, aproximadamente:

A $220\ cm^3$. B $240\ cm^3$. C $260\ cm^3$. D $280\ cm^3$. E $300\ cm^3$.

Exercícios propostos

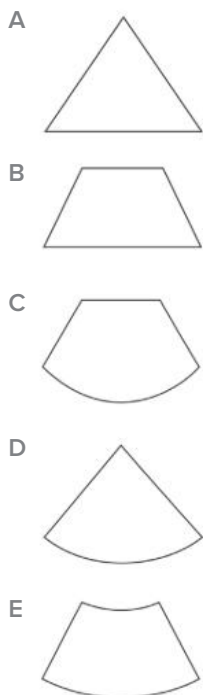
1 Enem 2014 Um sinalizador de trânsito tem o formato de um cone circular reto. O sinalizador precisa ser revestido externamente com adesivo fluorescente, desde sua base (base do cone) até a metade de sua altura, para sinalização noturna. O responsável pela colocação do adesivo precisa fazer o corte do material de maneira que a forma do adesivo corresponda exatamente à parte da superfície lateral a ser revestida. Qual deverá ser a forma do adesivo?

A

B

C

D

E

2 Projetado pelo arquiteto japonês Kisho Kurokawa e inaugurado em 1994 na cidade de Niihama, província de Ehime, no Japão, o Ehime Science Museum é composto de cinco amplas estruturas nas formas de uma elipse, um cubo, uma esfera, um triângulo e um cone.

Ryosei Watanabe/iStockphoto.com

Sabendo que a altura e o diâmetro da base da estrutura cônica, que corresponde ao *hall* de entrada para o museu, medem cerca de 24 m e 20 m, respectivamente, que $A_{\text{lateral do cone}} = \pi \cdot R \cdot g$, com $g = \sqrt{R^2 + (\text{altura})^2}$, e considerando $\pi = 3{,}1$, estima-se a superfície lateral dessa estrutura em, aproximadamente:

A $50\ m^2$. C $200\ m^2$. E $800\ m^2$.
B $100\ m^2$. D $400\ m^2$.

3 Uece 2016 (Adapt.) A razão entre a área total (área lateral mais a área da base) e o volume de um cone circular reto cuja medida da altura é 4 cm e a medida do raio da base é 3 cm é igual a:

A $1\ cm^{1}$. C $3\ cm^{1}$. E $5\ cm^{1}$.
B $2\ cm^{1}$. D $4\ cm^{1}$.

4 **Mackenzie 2018** Se um cone reto tem altura igual a 12 cm e seu volume é 64π cm^3, então sua geratriz, em cm, mede

A 20
B $10\sqrt{2}$
C $4\sqrt{10}$
D $4\sqrt{2}$
E $2\sqrt{10}$

5 **UEMG 2015** Um reservatório de água, de formato cônico, com raio da tampa circular igual a 8 metros e altura igual a 9 metros, será substituído por outro de forma cúbica, de aresta igual a 10 metros.
Estando o reservatório cônico completamente cheio, ao se transferir a água para o reservatório cúbico, a altura do nível atingida pela água será de (considere $\pi \cong 3$)

A 5,76 m.
B 4,43 m.
C 6,38 m.
D 8,74 m.

6 **Ifal 2018** Certo tanque de combustível tem o formato de um cone invertido com profundidade de 5 metros e com raio máximo de 4 metros. Quantos litros de combustível cabem, aproximadamente, nesse tanque? Considere $\pi = 3{,}14$.

A 20 000 ℓ.
B 50 240 ℓ.
C 83 733,33 ℓ.
D 104 666,67 ℓ.
E 150 000 ℓ.

7 **UFJF 2016** São dados dois cones equiláteros C_1 e C_2 tais que a área total de C_2 é o dobro da área total de C_1 e que o raio da base de C_1 é 3 cm. Sabendo que, em um cone equilátero, a geratriz é o dobro do raio da base, o volume do cone C_2, em centímetros cúbicos, é

A $9\sqrt{3}\pi$
B $9\sqrt{10}\pi$
C $18\sqrt{3}\pi$
D $18\sqrt{6}\pi$
E $54\sqrt{6}\pi$

8 Encontrados em laboratórios de Química, os recipientes erlenmeyer e béquer têm formatos bem próximos de um cone e um cilindro.

Considerando que um erlenmeyer e um béquer tenham o mesmo raio da base e a mesma altura, se o béquer tem capacidade de um litro, qual deve ser a capacidade aproximada do erlenmeyer?

A 500 mL.
B 330 mL.
C 250 mL.
D 200 mL.
E 100 mL.

9 **Ufla** Parte do líquido de um cilindro completamente cheio é transferido para dois cones idênticos, que ficam totalmente cheios.

A relação entre as alturas do líquido restante no cilindro (h_1) e a altura (H) do cilindro é:

A $h_1 = \frac{H}{4}$
B $h_1 = \frac{H}{2}$
C $h_1 = \sqrt{\frac{H}{2}}$
D $h_1 = \frac{H}{3}$

10 **UPE 2014** Um torneiro mecânico construiu uma peça retirando, de um cilindro metálico maciço, uma forma cônica, de acordo com a figura 01 a seguir:
Considere $\pi = 3$

Qual é o volume aproximado da peça em milímetros cúbicos?

A $2{,}16 \times 10^5$
B $7{,}2 \times 10^4$
C $2{,}8 \times 10^5$
D $8{,}32 \times 10^4$
E $3{,}14 \times 10^5$

11 **FMP 2017** Um recipiente cilíndrico possui raio da base medindo 4 cm e altura medindo 20 cm. Um segundo recipiente tem a forma de um cone, e as medidas do raio de sua base e de sua altura são iguais às respectivas medidas do recipiente cilíndrico.
Qual é a razão entre o volume do recipiente cilíndrico e o volume do recipiente cônico?

A $\frac{1}{5}$
B 4
C $\frac{1}{2}$
D 5
E 3

Texto para as questões **12** e **13**.

Um fabricante de cerâmicas produz recipientes em formas compostas de cilindros e cones. As figuras ilustram dois dos tipos fabricados.

Tipo A Tipo B

Geralmente usados para armazenar temperos, os recipientes do tipo A são cilíndricos e suas tampas são cônicas.

Comumente utilizados para armazenar líquidos, os recipientes do tipo B são cilíndricos na parte de baixo e cônicos na parte de cima. O líquido pode ser despejado por um pequeno orifício situado no vértice da parte cônica do recipiente.

12 Determine a razão entre as áreas laterais das formas que compõem um recipiente do tipo A, cujo formato seja de um cilindro equilátero de raio r, com a tampa no formato de um cone também equilátero de raio r.

13 Faça uma estimativa do volume de um recipiente do tipo B que também seja formado por um cone e um cilindro, ambos equiláteros e de raio 3 cm.

Considere $\pi = \frac{22}{7}$ e $\sqrt{3} \cong 1{,}7$.

14 **Unifor 2014** Parte do líquido de um cilindro circular reto que está cheio é transferido para dois cones circulares retos idênticos de mesmo raio e mesma altura do cilindro. Sabendo-se que os cones ficaram totalmente cheios e que o nível da água que ficou no cilindro é de 3 m, a altura do cilindro é de:

A 6 metros
B 8 metros
C 9 metros
D 12 metros
E 15 metros

15 **UPE 2018** Foram colocadas esferas de raio 5,0 cm dentro de um aquário que tem o formato de um paralelepípedo de 1,25 m de largura, 2,0 m de comprimento e 1,0 m de altura, cheio de água, ocupando sua capacidade máxima. Aproximadamente, quantas esferas terão que ser colocadas nesse aquário para que 10% do volume contido no seu interior seja derramado? Adote $\pi = 3{,}0$

A 250
B 300
C 325
D 450
E 500

16 **Enem** Uma empresa que fabrica esferas de aço, de 6 cm de raio, utiliza caixas de madeira, na forma de um cubo, para transportá-las.

Sabendo que a capacidade da caixa é de 13 824 cm^3, então o número máximo de esferas que podem ser transportadas em uma caixa é igual a

A 4.
B 8.
C 16.
D 24.
E 32.

17 **UEG 2015** Suponha que haja laranjas no formato de uma esfera com 6 cm de diâmetro e que a quantidade de suco que se obtém ao espremer cada laranja é 2/3 de seu volume, sendo o volume dado em litros. Nessas condições, se quiser obter 1 litro de suco de laranja, deve-se espremer no mínimo

Use $\pi = 3{,}14$.

A 13 laranjas
B 14 laranjas
C 15 laranjas
D 16 laranjas

18 **IFPE 2017** Maria Carolina resolveu sair um pouco do seu regime e foi saborear uma deliciosa sobremesa composta por três bolas de sorvete e 27 uvas, conforme a imagem abaixo. Suponha que as bolas de sorvete e as uvas tenham formatos esféricos e que Maria Carolina comeu toda a sua sobremesa. Usando $\pi = 3$, sabendo que os raios de cada bola de sorvete têm 4 cm e, de cada uva, 1 cm, podemos afirmar que ela consumiu, nessa sobremesa, em centímetros cúbicos, um total de

Disponível em: <http://s1.1zoom.me/big3/144/Ice_cream_Blueberries 440624.jpg>. Acesso em: 20 maio 2017.

A 108.
B 768.
C 876.
D 260.
E 900.

19 **Acafe 2017** Considere o caso abaixo e responda: quantas gotas dessa medicação o médico deve administrar utilizando o segundo conta-gotas, para garantir a mesma quantidade de medicamento do primeiro conta-gotas?

Certo paciente deve ingerir exatamente 7 gotas de um medicamento a ser administrado através de um conta-gotas cilíndrico cujo diâmetro mede d cm. Em certa ocasião, o médico tinha disponível apenas um segundo conta-gotas, também cilíndrico, cuja medida do diâmetro é igual à metade do diâmetro do primeiro conta-gotas. Sabe-se que o volume de cada gota equivale ao volume de uma esfera com mesmo diâmetro do conta-gotas utilizado para formá-la.

A 14 gotas
B 3,5 gotas
C 7 gotas
D 56 gotas

20 **Enem 2016** Uma indústria de perfumes embala seus produtos, atualmente, em frascos esféricos de raio R, com volume dado por $\frac{4}{3}\pi \cdot (R)^3$.

Observou-se que haverá redução de custos se forem utilizados frascos cilíndricos com raio da base $\frac{R}{3}$, cujo volume será dado por $\pi \cdot \left(\frac{R}{3}\right)^2 \cdot h$, sendo h a altura da nova embalagem.

Para que seja mantida a mesma capacidade do frasco esférico, a altura do frasco cilíndrico (em termos de R) deverá ser igual a

A 2R.
B 4R.
C 6R.
D 9R.
E 12R.

21 **Enem** Se pudéssemos reunir em esferas toda a água do planeta, os diâmetros delas seriam:

Guia do Estudante: Atualidades e Vestibulares+ENEM. Abril: São Paulo, 2009.

A razão entre o volume da esfera que corresponde à água doce superficial e o volume da esfera que corresponde à água doce do planeta é

A $\frac{1}{343}$
B $\frac{1}{49}$
C $\frac{1}{7}$
D $\frac{29}{136}$
E $\frac{136}{203}$

22 **FGV-SP 2013** Um reservatório tem a forma de uma esfera. Se aumentarmos o raio da esfera em 20%, o volume do novo reservatório, em relação ao volume inicial, aumentará

A 60%
B 63,2%
C 66,4%
D 69,6%
E 72,8%

23 **UEG 2017** Ao triplicarmos o raio e tomarmos a terça parte de uma esfera, ela possuirá, em relação à esfera original, um volume

A 2 vezes maior
B 3 vezes maior
C 9 vezes maior
D 12 vezes maior
E 20 vezes maior

24 **Uefs 2016** Uma bolha de sabão, esférica, não estouraria se sua área superficial fosse, no máximo, 44% maior. Logo, ela poderia conter um volume de ar em seu interior, sem estourar, até

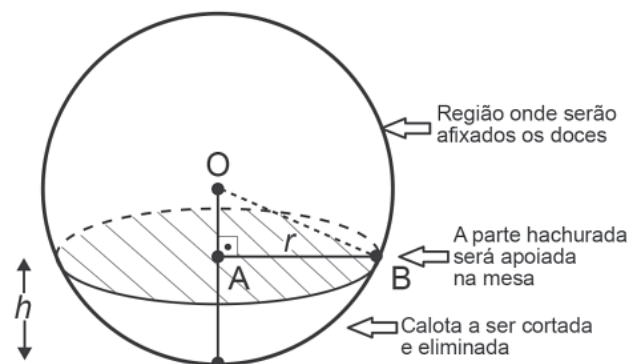
A 32,4% maior.
B 44% maior.
C 53,6% maior.
D 66% maior.
E 72,8% maior.

25 **UEG 2015** Uma laranja com formato esférico e com 6 cm de diâmetro foi descascada até sua metade. Considerando esse dados, verifica-se que a área total da casca retirada é de aproximadamente (use $\pi = 3{,}14$)

A 48 cm^2
B 57 cm^2
C 74 cm^2
D 95 cm^2

26 **UFRGS 2016** Se um jarro com capacidade para 2 litros está completamente cheio de água, a menor medida inteira, em cm, que o raio de uma bacia com a forma semiesférica deve ter para comportar toda a água do jarro é

A 8.
B 10.
C 12.
D 14.
E 16.

27 **Enem 2017** Para decorar uma mesa de festa infantil, um chefe de cozinha usará um melão esférico com diâmetro medindo 10 cm, o qual servirá de suporte para espetar diversos doces. Ele irá retirar uma calota esférica do melão, conforme ilustra a figura, e, para garantir a estabilidade deste suporte, dificultando que o melão role sobre a mesa, o chefe fará o corte de modo que o raio r da seção circular de corte seja de pelo menos 3 cm. Por outro lado, o chefe desejará dispor da maior área possível da região em que serão afixados os doces.

Para atingir todos os seus objetivos, o chefe deverá cortar a calota do melão numa altura h, em centímetro, igual a

A $5 - \frac{\sqrt{91}}{2}$
B 10 $\sqrt{91}$
C 1
D 4
E 5

FRENTE 3

28 **UFU** Sabendo-se que a interseção entre um plano π e uma esfera S de raio 10 cm é uma circunferência de raio 6 cm, então, a distância do centro da esfera S até o plano π é igual a

A 8 cm.
B 4 cm.
C 5 cm.
D 7 cm.

29 **Fuvest 2014**

Relógio Solar é um projeto de Caetano Fraccaroli, executado por Vera Pallamin.

Esta foto é do relógio solar localizado no *campus* do Butantã, da USP. A linha inclinada (tracejada na foto), cuja projeção ao chão pelos raios solares indica a hora, é paralela ao eixo de rotação da Terra. Sendo μ e ρ, respectivamente, a latitude e a longitude do local, medidas em graus, pode se afirmar, corretamente, que a medida em graus do ângulo que essa linha faz com o plano horizontal é igual a

A ρ
B μ
C 90 ρ
D 90 μ
E 180 ρ

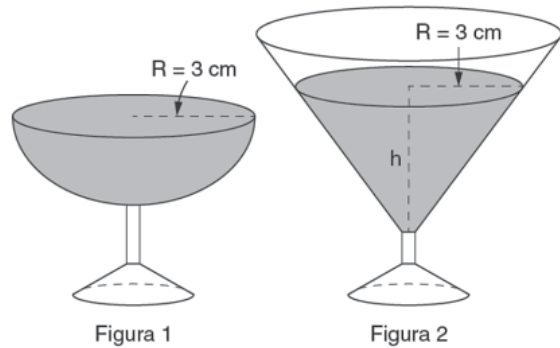
Nota: Entende-se por "plano horizontal", em um ponto da superfície terrestre, o plano perpendicular à reta que passa por esse ponto e pelo centro da Terra.

30 **Unesp 2019** Os pontos P e Q sobre a superfície da Terra possuem as seguintes coordenadas geográficas:

	Latitude	Longitude
P	30° N	45° L
Q	30° N	15° O

Considerando a Terra uma esfera de raio 6300 km, a medida do menor arco $\overset{\frown}{PQ}$ sobre a linha do paralelo 30° N é igual a

A $1150\pi\sqrt{3}$ km
B $1250\pi\sqrt{3}$ km
C $1050\pi\sqrt{3}$ km
D $1320\pi\sqrt{3}$ km
E $1350\pi\sqrt{3}$ km

31 **Enem** Em um casamento, os donos da festa serviam champanhe aos seus convidados em taças com formato de um hemisfério (Figura 1), porém um acidente na cozinha culminou na quebra de grande parte desses recipientes. Para substituir as taças quebradas, utilizou-se um outro tipo com formato de cone (Figura 2). No entanto, os noivos solicitaram que o volume de champanhe nos dois tipos de taças fosse igual.

Considere:

$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi R^3 \text{ e } V_{cone} = \frac{1}{3}\pi R^2 h$$

Sabendo que a taça com o formato de hemisfério é servida completamente cheia, a altura do volume de champanhe que deve ser colocado na outra taça, em centímetros, é de

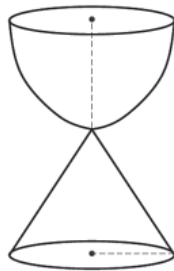
A 1,33.
B 6,00.
C 12,00.
D 56,52.
E 113,04.

32 **Enem 2014** Uma empresa farmacêutica produz medicamentos em pílulas, cada uma na forma de um cilindro com uma semiesfera com o mesmo raio do cilindro em cada uma de suas extremidades. Essas pílulas são moldadas por uma máquina programada para que os cilindros tenham sempre 10 mm de comprimento, adequando o raio de acordo com o volume desejado.
Um medicamento é produzido em pílulas com 5 mm de raio. Para facilitar a deglutição, deseja-se produzir esse medicamento diminuindo o raio para 4 mm, e, por consequência, seu volume. Isso exige a reprogramação da máquina que produz essas pílulas.
Use 3 como valor aproximado para π.
A redução do volume da pílula, em milímetros cúbicos, após a reprogramação da máquina, será igual a

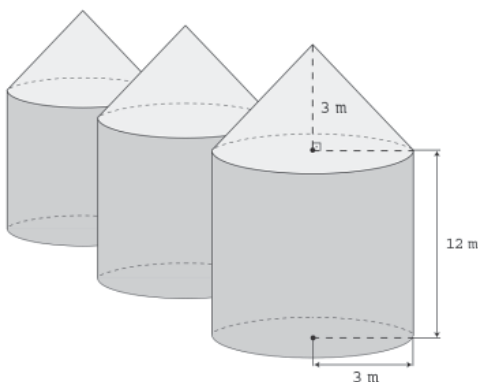
A 168.
B 304.
C 306.
D 378.
E 514.

33 **Uern 2012** A figura representa um sorvete de casquinha, no qual todo o volume interno está preenchido por sorvete e a parte externa apresenta um volume de meia bola de sorvete. Considerando que o cone tem 12 cm de altura e raio 6 cm, então o volume total de sorvete é

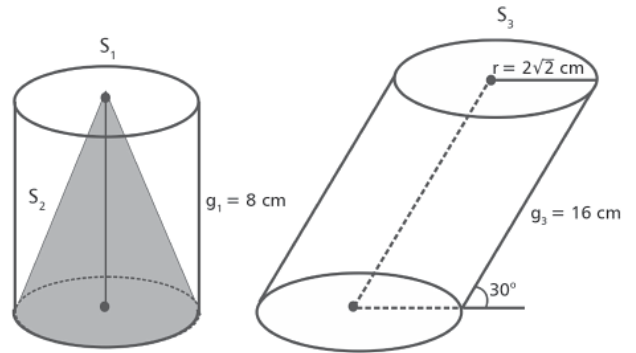
A 216π cm^3.
C 288π cm^3.
B 360π cm^3.
D 264π cm^3.

34 **Cefet-MG 2014** Um artesão resolveu fabricar uma ampulheta de volume total V constituída de uma semiesfera de raio 4 cm e de um cone reto, com raio e altura 4 cm, comunicando-se pelo vértice do cone, de acordo com a figura abaixo.

Para seu funcionamento, o artesão depositará na am pulheta areia que corresponda a 25% de V. Portanto, o volume de areia, em cm^3, é

A 16π.
C 32π.
E 64π.
B $\frac{64\pi}{3}$.
D $\frac{128\pi}{3}$.

35 **Enem 2016** Em regiões agrícolas, é comum a presença de silos para armazenamento e secagem da produção de grãos, no formato de um cilindro reto, sobreposto por um cone, e dimensões indicadas na figura. O silo fica cheio e o transporte dos grãos é feito em caminhões de carga cuja capacidade é de 20 m^3. Uma região possui um silo cheio e apenas um caminhão para transportar os grãos para a usina de beneficiamento.

Utilize 3 como aproximação para π.
O número mínimo de viagens que o caminhão precisará fazer para transportar todo o volume de grãos armazenados no silo é

A 6.
B 16.
C 17.
D 18.
E 21.

36 **UEMG 2017** Observe as figuras.

Nas figuras acima, tem-se um cilindro circular equilátero (S_1), circunscrevendo um cone (S_2), e um cilindro circular oblíquo (S_3). A razão determinada pelo volume de S_3 com a superfície total de S_2 é

A $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ cm.
C $\frac{\sqrt{5}+16}{4}$ cm.
B $\sqrt{5}-1$ cm.
D $\sqrt{5}+16$ cm.

37 **IFPE 2016** Uma bola maciça, totalmente vedada, em formato de uma esfera perfeita, de diâmetro igual a 6 cm, foi lançada em uma panela cilíndrica cujo raio da base mede 5 cm e altura 10 cm. Sabendo que inicialmente a panela estava com água até a altura de 5 cm e que a bola ficou completamente submersa pela água, quantos centímetros o nível da água se elevará? (Dado: considere $\pi = 3$)

A $\frac{36}{25}$
B $\frac{5}{3}$
C $\frac{25}{3}$
D $\frac{30}{25}$
E $\frac{25}{15}$

38 **UFU 2018** Um recipiente, no formato de um cilindro circular reto de raio de base r cm, possui um líquido solvente em seu interior. A altura h desse solvente presente no recipiente é igual a $\frac{16}{3}$ cm, conforme ilustra a Figura 1.

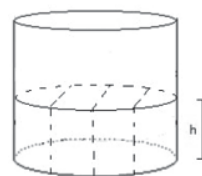



Figura 1
(Ilustrativa e sem escalas)

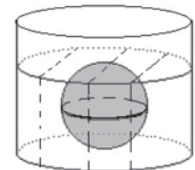



Figura 2
(Ilustrativa e sem escalas)

FRENTE 3

Quando uma peça maciça, no formato de uma esfera de raio igual a 3 cm, é mergulhada nesse recipiente até encostar no fundo, observa-se que o solvente cobre exatamente a esfera, conforme ilustra a Figura 2.
Segundo as condições apresentadas, o raio *r*, em cm, é igual a

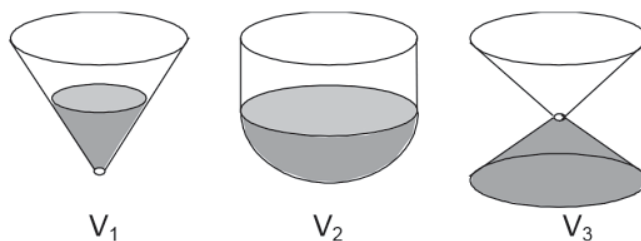
A $4\sqrt{3}$.
B $2\sqrt{7}$.
C $5\sqrt{2}$.
D $3\sqrt{6}$.

39 **Enem** Um artista plástico construiu, com certa quantidade de massa modeladora, um cilindro circular reto cujo diâmetro da base mede 24 cm e cuja altura mede 15 cm. Antes que a massa secasse, ele resolveu transformar aquele cilindro em uma esfera.

Volume da esfera: $V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi R^3$

Analisando as características das figuras geométricas envolvidas, conclui-se que o raio R da esfera assim construída é igual a

A 15
B 12
C 24
D $3\sqrt[3]{60}$
E $6\sqrt[3]{30}$

40 **Enem** Os três recipientes da figura têm formas diferentes, mas a mesma altura e o mesmo diâmetro da boca. Em cada um deles é colocado líquido até a metade de sua altura, conforme indicado nas figuras.

Representando por V_1, V_2 e V_3 o volume de líquido em cada um dos recipientes, tem-se:

A $V_1 = V_2 = V_3$
B $V_1 < V_3 < V_2$
C $V_1 = V_3 < V_2$
D $V_3 < V_1 < V_2$
E $V_1 < V_2 = V_3$

41 **Udesc 2019** Arquimedes de Siracusa (287 a.C.-212 a.C.) foi um dos maiores matemáticos de todos os tempos. Ele fez grandes descobertas e sempre foi muito rigoroso ao provar essas descobertas. Dentre seus vários trabalhos, a esfera foi um dos elementos geométricos aos quais ele se dedicou, estabelecendo relações para obter o seu volume. No Quadro 1, têm-se três dessas relações para o volume de uma esfera de raio R.

Método	Relação
Equilíbrio	Considerando uma balança com ponto de apoio em O, a esfera e um cone de raio e altura 2R colocados a uma distância 2R do ponto O equilibram um cilindro de raio e altura 2R colocado a uma distância R de O.
Dupla redução ao absurdo	O volume da esfera é igual a 4 vezes o volume de um cone de raio e altura R.
Cilindro circunscrito	O cilindro circunscrito à esfera é igual a uma vez e meia à esfera, em área e volume.

Tab. 1 Relações de Arquimedes para o volume da esfera de raio R.

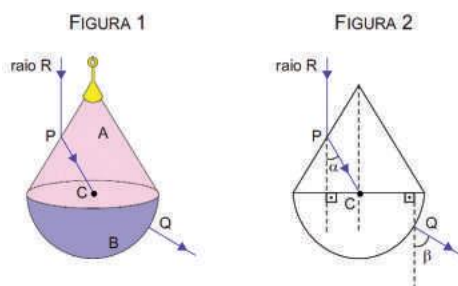
Se o cone do método da dupla redução ao absurdo tiver volume igual a 243π cm³, então a diferença do volume entre o cilindro do método do equilíbrio e do cilindro circunscrito é:

A 972π cm³
B 0 cm³
C $546{,}75\pi$ cm³
D 4374π cm³
E 1701π cm³

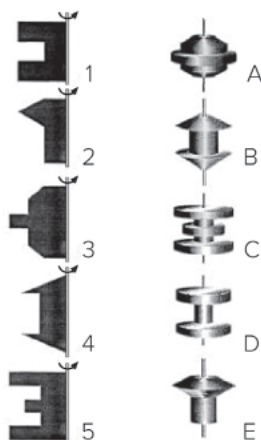
42 **Fuvest** Um fabricante de cristais produz três tipos de taças para servir vinho. Uma delas tem o bojo no formato de uma semiesfera de raio r; a outra, no formato de um cone reto de base circular de raio 2r e altura h; e a última, no formato de um cilindro reto de base circular de raio x e altura h.
Sabendo-se que as taças dos três tipos, quando completamente cheias, comportam a mesma quantidade de vinho, é correto afirmar que a razão $\frac{x}{h}$ é igual a

A $\frac{\sqrt{3}}{6}$
B $\frac{\sqrt{3}}{3}$
C $\frac{2\sqrt{3}}{3}$
D $\sqrt{3}$
E $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

43 Unifesp 2015 O pingente de um colar é constituído por duas peças, A e B, feitas de materiais homogêneos e transparentes, de índices de refração absolutos $n_A = 1{,}6 \cdot \sqrt{3}$ e $n_B = 1{,}6$. A peça A tem o formato de um cone reto e a peça B, de uma semiesfera.

Um raio de luz monocromático R propaga-se pelo ar e incide, paralelamente ao eixo do cone, no ponto P da superfície cônica, passando a se propagar pelo material da peça A. Atinge o ponto C, no centro da base do cone, onde sofre nova refração, passando a propagar-se pelo material da peça B, emergindo do pingente no ponto Q da superfície esférica. Desde a entrada até a sua saída do pingente, esse raio propaga-se em um mesmo plano que contém o vértice da superfície cônica. A figura 1 representa o pingente pendurado verticalmente e em repouso e a figura 2, a intersecção do plano que contém o raio R com o pingente. As linhas tracejadas, indicadas na figura 2, são paralelas entre si e $\alpha = 30^o$.

a) Calcule o valor do ângulo β indicado na figura 2, em graus.

b) Considere que a peça B possa ser substituída por outra peça B', com o mesmo formato e com as mesmas dimensões, mas de maneira que o raio de luz vertical R sempre emerja do pingente pela superfície esférica. Qual o menor índice de refração do material de B' para que o raio R não emerja pela superfície cônica do pingente?

44 Enem Assim como na relação entre o perfil de um corte de um torno e a peça torneada, sólidos de revolução resultam da rotação de figuras planas em torno de um eixo. Girando-se as figuras a seguir em torno da haste indicada, obtêm-se os sólidos de revolução que estão na coluna da direita.

A correspondência correta entre as figuras planas e os sólidos de revolução obtidos é:

A 1A, 2B, 3C, 4D, 5E.
B 1B, 2C, 3D, 4E, 5A.
C 1B, 2D, 3E, 4A, 5C.
D 1D, 2E, 3A, 4B, 5C.
E 1D, 2E, 3B, 4C, 5A.

45 Mackenzie 2016 Em um triângulo retângulo, a medida do menor cateto é 6 cm. Rotacionando esse triângulo ao redor desse cateto, obtém-se um sólido de revolução cujo volume é 128π cm^3. Nessas condições, a área total da superfície do sólido obtido na revolução, em cm^2, é

A 144π
B 120π
C 80π
D 72π
E 64π

46 Ifal 2016 Girando, em uma volta completa, um triângulo retângulo de catetos 3 cm e 4 cm, em torno de seu cateto maior, teremos o sólido abaixo com suas características:

A pirâmide com área lateral 30 cm^2 e volume 10 cm^3.
B cone com área lateral 15π cm^2 e volume 12π cm^3.
C cone com área da base 16π cm^2 e volume 12π cm^3.
D pirâmide com área da base e área lateral iguais a 12π cm^3.
E cone com área da base e área lateral iguais a 15π cm^3.

47 FGV-SP 2018 Um trapézio é delimitado pelos eixos *x* e *y* do plano cartesiano e pelas retas de equações $y = 2x + 1$ e $x = 4$. O sólido de revolução obtido quando esse trapézio sofre uma rotação completa em torno do eixo *y* tem volume, em unidades cúbicas de comprimento dos eixos cartesianos, igual a

A $\frac{304\pi}{3}$
B 101π
C $\frac{302\pi}{3}$
D 96π
E $\frac{286\pi}{3}$

48 PUC-RS 2014 Uma esfera de raio 1 cm está inscrita em um cubo cujo volume, em cm^3, é

A 1
B 2
C 4
D 8
E 16

49 PUC-RS 2016 A circunferência de uma bola de voleibol é 66 cm. Para colocá-la em uma caixa cúbica, essa caixa deve ter, no mínimo, uma aresta interna, em centímetros, de

A 33
B $\frac{33}{\pi}$
C 66
D $\frac{66}{\pi}$
E $\frac{\pi}{66}$

50 Uece 2017 Um cubo cuja medida de cada aresta é 3 dm está inscrito em uma esfera de raio R. A medida de um diâmetro (2R) da esfera é

A $2\sqrt{3}$ dm.
B $3\sqrt{2}$ dm.
C $3\sqrt{3}$ dm.
D $4\sqrt{3}$ dm.

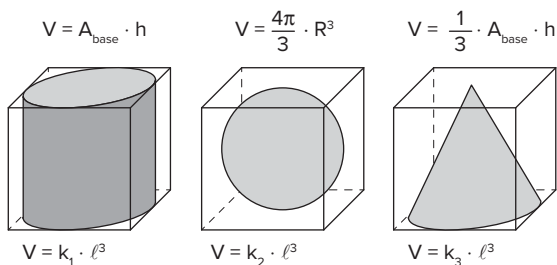
51 **EEAR 2017** Uma esfera está inscrita num cilindro equilátero cuja área lateral mede 16π cm². O volume da esfera inscrita é

A 8π
B 16π
C $\frac{32}{3}\pi$
D $\frac{256}{3}\pi$

52 O volume de um sólido é uma grandeza diretamente proporcional a cada uma de suas três dimensões: comprimento, largura e altura. Por isso, o volume pode ser expresso pela relação:

$$[\text{volume}] = k \cdot [\text{comprimento}] \cdot [\text{largura}] \cdot [\text{altura}]$$

Em que k representa uma constante de proporcionalidade específica de cada forma geométrica, como ilustram as figuras a seguir.

V = $k_2 \cdot \ell^3$

As constantes k_1, k_2 e k_3, que relacionam os volumes do cilindro, da esfera e do cone inscritos em cubos de aresta ℓ, são, respectivamente:

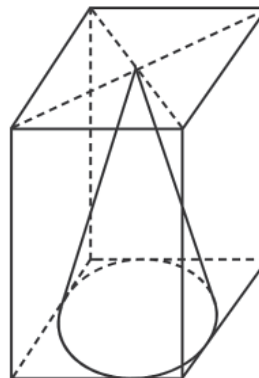
A $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{\pi}{6}$.
B $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{4}$.
C $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{8}$.
D $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{\pi}{12}$.
E $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{\pi}{12}$.

53 **UPE 2017** Um cone reto está inscrito num cubo de aresta 8 cm. Se a altura do cone e o diâmetro de sua base têm medidas iguais, qual é a diferença entre as medidas dos seus volumes? Considere $\pi = 3{,}0$.

A 128 cm³
B 256 cm³
C 384 cm³
D 424 cm³
E 512 cm³

54 **Udesc 2016** A base de um cone reto está inscrita em uma face de um cubo e seu vértice está no centro da face oposta. Se o volume do cone é $\frac{2\pi}{3}$ metros cúbicos, a área do cubo (em metros quadrados) é igual a:

A 8
B 24
C 16
D 20
E 4

55 **PUC-RS 2016** Um cone está inscrito em um paralelepípedo, como na figura. A altura do paralelepípedo é o dobro do lado da base quadrada, de área 400 cm². Então, a razão entre o volume do cone e o do paralelepípedo é

A 16 000
B $\frac{4000}{3\pi}$
C $\frac{12}{\pi}$
D $\frac{\pi}{12}$
E $\frac{\pi}{36}$

56 **Unicamp** A base de uma pirâmide é um triângulo equilátero de lado L = 6 cm e arestas laterais das faces A = 4 cm.

a) Calcule a altura da pirâmide.
b) Qual é a medida do raio da esfera circunscrita à pirâmide?

57 **Fuvest** A esfera ε, de centro O e raio $r > 0$, é tangente ao plano α. O plano β é paralelo a α e contém O. Nessas condições, o volume da pirâmide que tem como base um hexágono regular inscrito na intersecção de ε com β e, como vértice, um ponto em α, é igual a

A $\frac{\sqrt{3}r^3}{4}$
B $\frac{5\sqrt{3}r^3}{16}$
C $\frac{3\sqrt{3}r^3}{8}$
D $\frac{7\sqrt{3}r^3}{16}$
E $\frac{\sqrt{3}r^3}{2}$

Texto complementar

Fórmulas de Papo-Guldin

Papo, ou Papus, de Alexandria foi um matemático grego da Antiguidade que estudou detalhadamente as proposições de Arquimedes e Euclides, tendo proposto dois grandes teoremas aplicados aos sólidos de revolução e às suas superfícies não planas.

Esses teoremas foram posteriormente retomados pelo matemático suíço Paul Guldin.

PAPPI
ALEXANDRINI
MATHEMATICAE
COLLECTIONES
À FEDERICO
COMMANDINO
VRBINATE
IN LATINVM CONVERSÆ,
ET COMMENTARIIS
ILLVSTRATAE.
PISAVRI,
Apud Hieronymum Concordiam,
M. D. LXXXVIII.
Superiorum Concessu.

Fig. 1 Folha de rosto do livro de Papo de Alexandria, *Mathematicae Collectiones*, 1588, com tradução de Federico Commandino.

PAULI GULDINI
SANCTO-GALLENSIS
E SOCIETATE JESU,
DE
CENTRO
GRAVITATIS,
LIBER QVARTVS,
DE GLORIA,
Ab Usu Centri Gravitatis
binarum specierum Quantitatis con-
tinuæ parta.
SIVE
ARCHIMEDES ILLVSTRATVS.
VIENNÆ AUSTRIÆ,
Formis Matthæi Cosmerovij in Aula Coloniensi.
Anno à Christo Nato
M. DC. XLI.

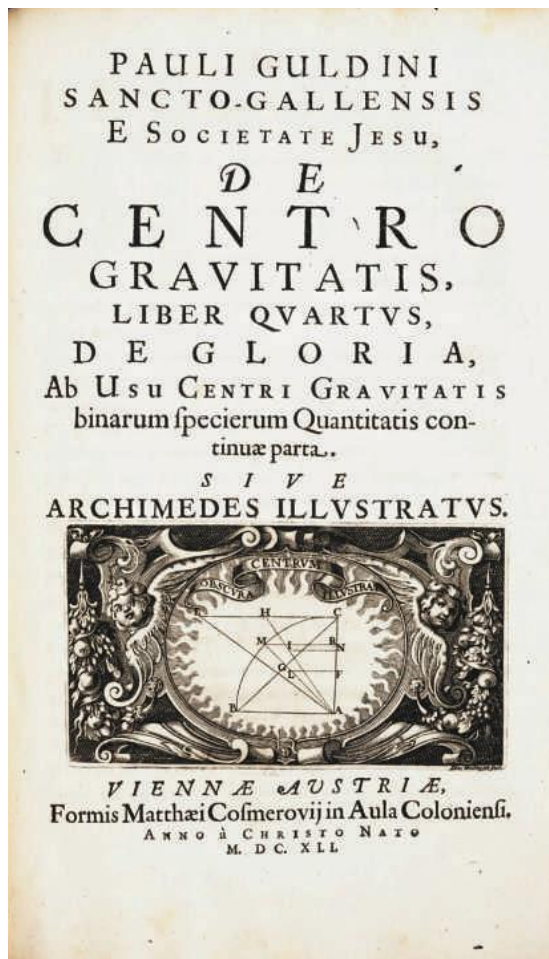



Fig. 2 Folha de rosto do livro de Paul Guldin, *De centro gravitatis*, livro 4, 1635.

Para as superfícies de revolução, o teorema de Papo-Guldin diz que, sendo ℓ o comprimento da curva geratriz e d a distância do centro de gravidade da geratriz ao eixo, a área A da superfície gerada pela revolução de θ radianos da geratriz em torno do eixo é expressa por:

$$A = \theta \cdot d \cdot \ell$$

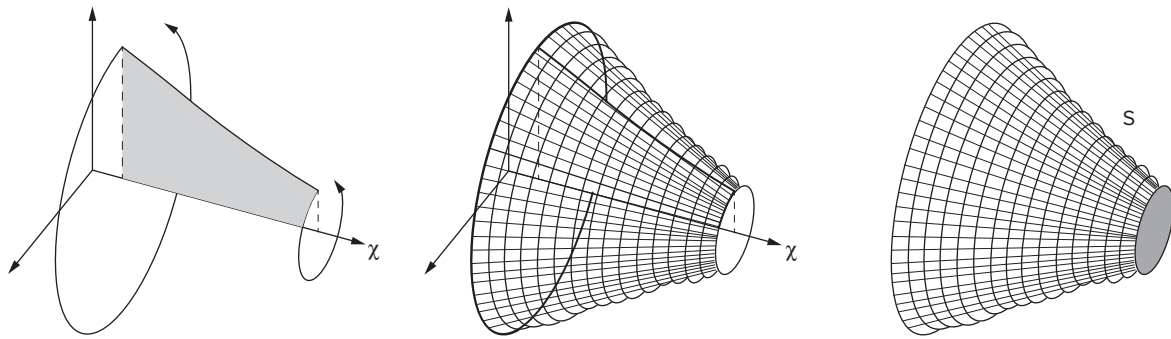
Com essa fórmula, pode-se demonstrar, por exemplo, a expressão para a área da superfície lateral de um cone de raio R e geratriz g, pois, nesse caso, tem-se que:

$$\theta = 2\pi \qquad d = \frac{R}{2} \qquad \ell = g$$

Assim, a área da superfície lateral do cone fica expressa por:

$$A = \theta \cdot d \cdot \ell$$

$$A = 2\pi \cdot \frac{R}{2} \cdot g$$

$$A = \pi \cdot R \cdot g$$

Para os sólidos de revolução, o teorema de Papo-Guldin diz que, se uma figura plana de área S e baricentro G efetua uma revolução de θ radianos em torno de um eixo que não seciona a figura, então sendo d a distância do ponto G ao eixo de revolução, o volume do sólido gerado por essa revolução é expresso por:

$$V = \theta \cdot d \cdot S$$

Com essa fórmula, pode-se demonstrar, por exemplo, a expressão para o volume do cone circular reto de raio R e altura h, pois, nesse caso, tem-se que:

$$\theta = 2\pi \qquad d = \frac{R}{3} \qquad S = \frac{R \cdot h}{2}$$

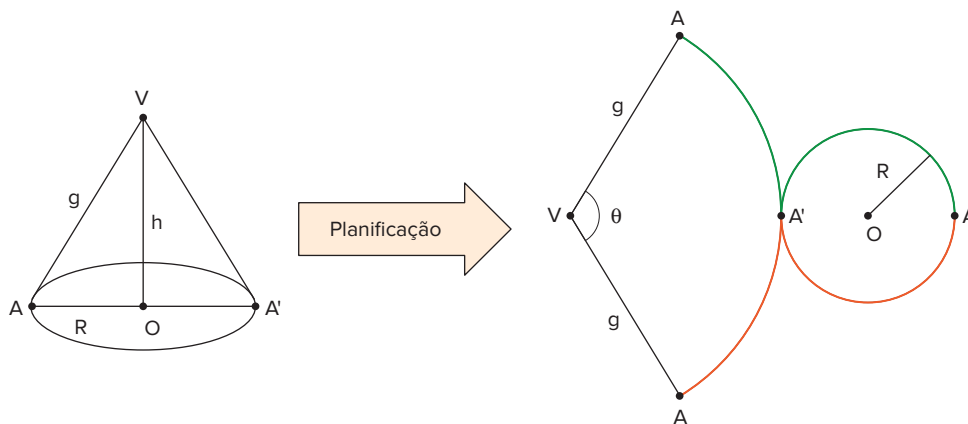
Assim, a área da superfície lateral do cone fica expressa por:

$$V = \theta \cdot d \cdot S$$

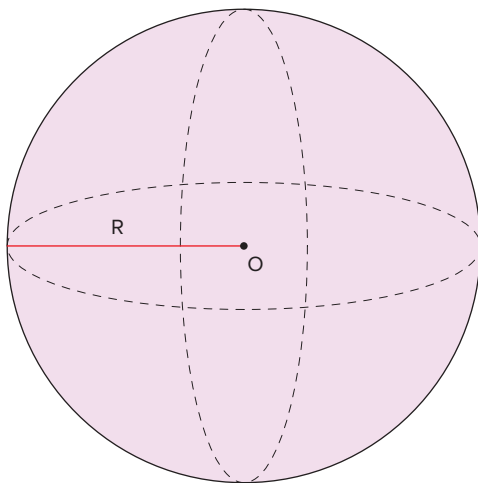
$$V = 2\pi \cdot \frac{R}{3} \cdot \frac{R \cdot h}{2}$$

$$V = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot h}{3}$$

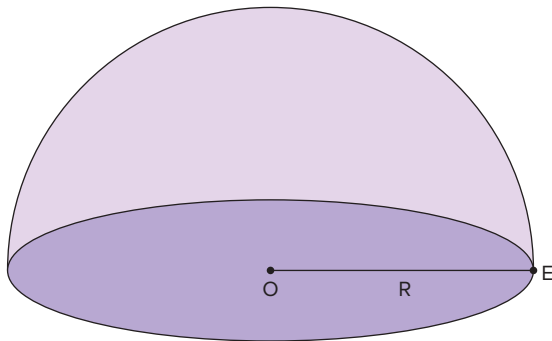
Resumindo

Cone circular reto

$$g^2 = R^2 + h^2 \qquad \theta \cdot g = 2\pi \cdot R \qquad V = \frac{\pi R^2 h}{3}$$

$$A_{lateral} = \pi \cdot R \cdot g \qquad A_{total} = \pi \cdot R^2 + \pi \cdot R \cdot g$$

Esfera

$$V = \frac{4\pi R^3}{3}$$

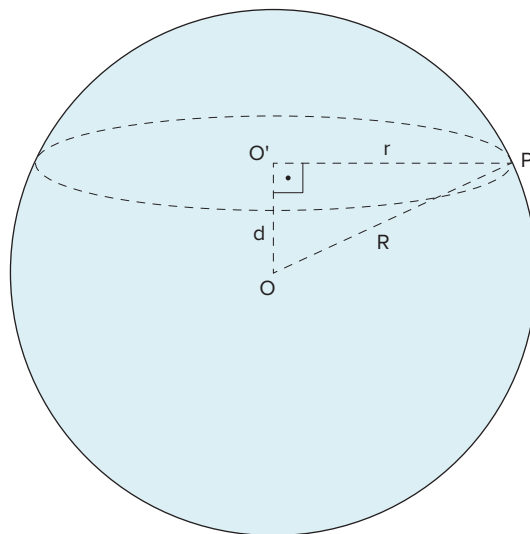
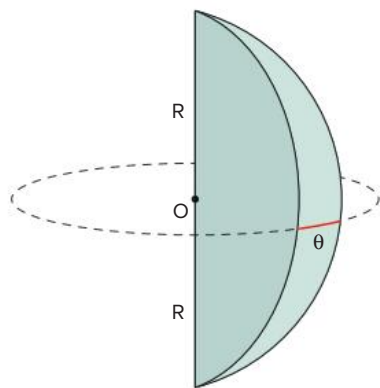
$$A_{\text{superfície esférica}} = 4\pi \cdot R^2$$

Hemisfério

$$V = \frac{2\pi R^3}{3}$$

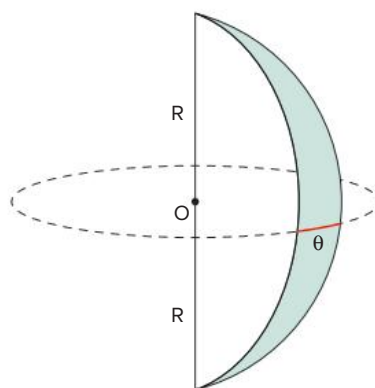
$$A_{\text{hemisfério}} = 3\pi \cdot R^2$$

Calotas esféricas

$$R^2 = d^2 + r^2$$

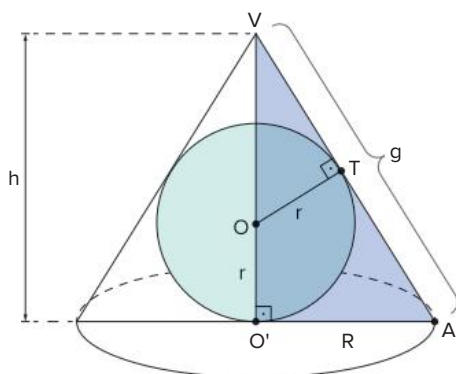
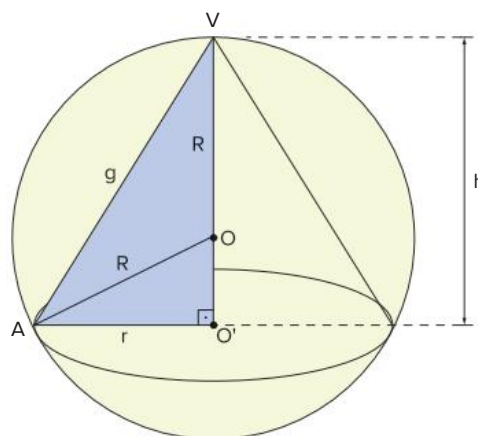
FRENTE 3

Cunha e fuso esféricos

θ em graus
$$V_{cunha} = \frac{\theta \pi R^3}{270°}$$

θ em radianos
$$V_{cunha} = \frac{2}{3}\theta R^3$$

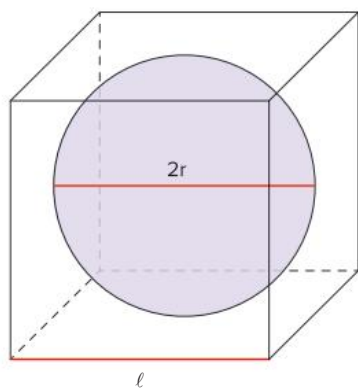
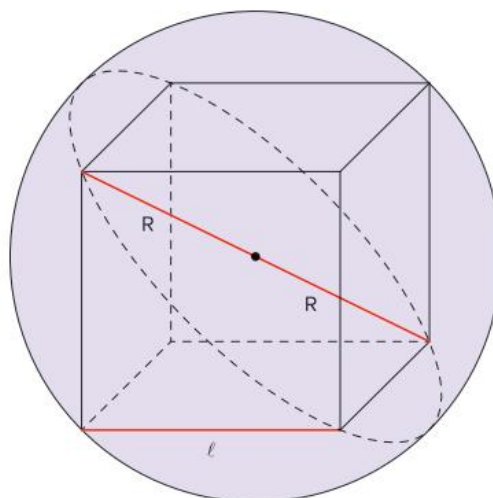
$$A_{cunha} = (\pi + 2\theta) \cdot R^2$$
θ em radianos

θ em graus
$$A_{fuso} = \frac{\theta \pi R^2}{90°}$$

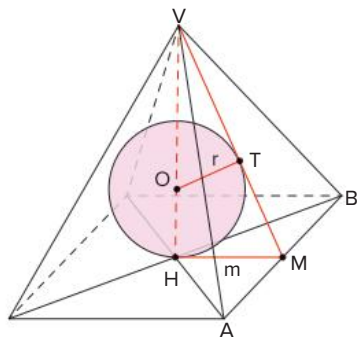
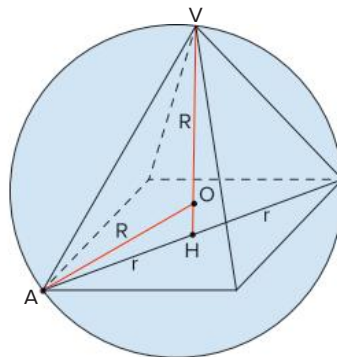
θ em radianos
$$A_{fuso} = 2\theta R^2$$

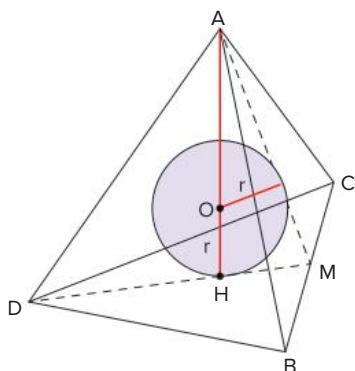
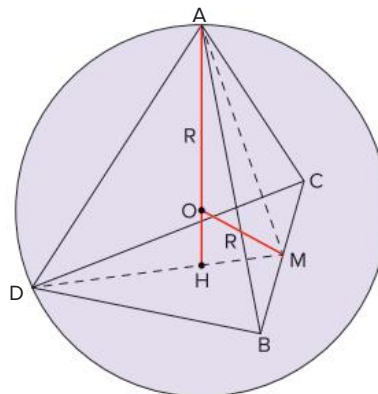
Inscrições e circunscrições

Esfera e cone

$$r = \frac{hR}{g + R}$$

$$R = \frac{g^2}{2h}$$

Esfera e cubo

$$r = \frac{\ell}{2}$$

$$R = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

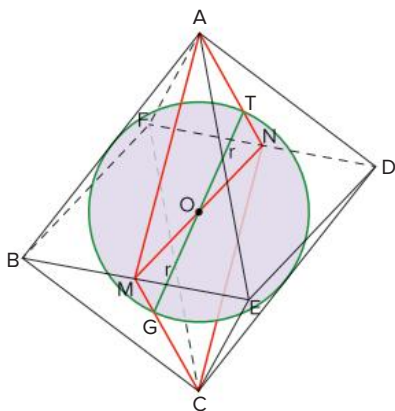
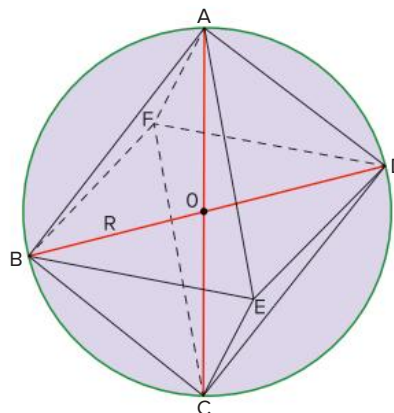
Esfera e pirâmide regular

$$r = \frac{h \cdot m}{g + m}$$

$$R = \frac{r^2 + h^2}{2h}$$

Esfera e tetraedro

$$r = \frac{\ell\sqrt{6}}{12}$$

$$R = \frac{\ell\sqrt{6}}{4}$$

Esfera e octaedro

$$r = \frac{\ell\sqrt{6}}{6}$$

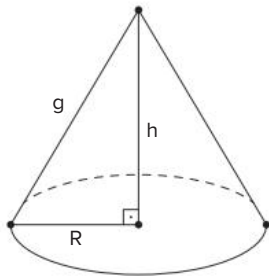
$$R = \frac{\ell\sqrt{2}}{2}$$

Quer saber mais?

Sites

- Breve história dos trabalhos de Arquimedes.
  Disponível em: <https://matematica.br/historia/arquimedes.html>.
- Relação entre cortes de mesma altura na esfera, no cilindro e no cone duplo.
  Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/djv7nc6a>.

Exercícios complementares

Texto para as questões de **1** a **4**.

As medidas do raio da base, da altura e da geratriz do cone circular reto ilustrado a seguir formam, nessa ordem, uma progressão aritmética de razão igual a 5.

1 Calcule os valores do raio da base, da altura e da geratriz do cone.

2 Faça uma estimativa do volume do cone.

3 Realize uma estimativa da área da superfície total do cone.

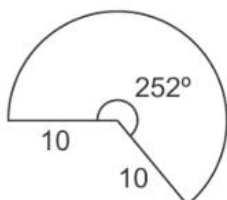
4 Determine a medida, em graus, do ângulo central do setor circular que se obtém da planificação da superfície lateral do cone.

5 **UFJF 2016** Considere uma esfera de raio 2 cm com área total A e volume V. Suponha que os valores *y*, A e V, formem uma progressão geométrica nessa ordem. Em centímetros, quanto vale *y*?

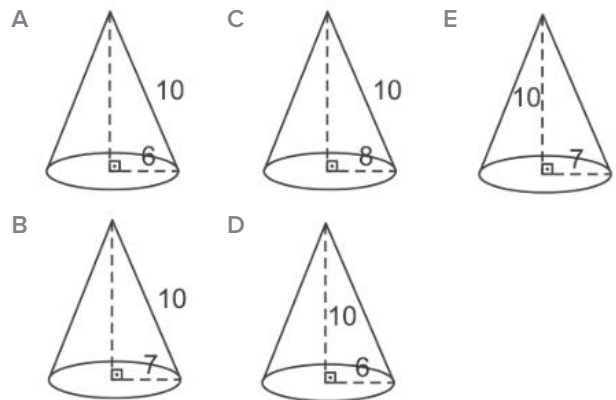
A $\frac{3\pi}{2}$
B $\frac{8\pi}{3}$
C 8π
D 24π
E 96π

6 A área lateral de um cone circular reto é igual ao triplo da área de sua base. Se executarmos a planificação de sua superfície lateral, obteremos um setor circular cujo ângulo central mede

A 90°
B 100°
C 110°
D 120°
E 130°

7 **FGV-SP** A figura indica a planificação da lateral de um cone circular reto:

O cone a que se refere tal planificação é

A
B
C

D

E
8 **Fuvest** Deseja-se construir um cone circular reto com 4 cm de raio da base e 3 cm de altura. Para isso, recorta-se, em cartolina, um setor circular para a superfície lateral e um círculo para a base. A medida do ângulo central do setor circular é

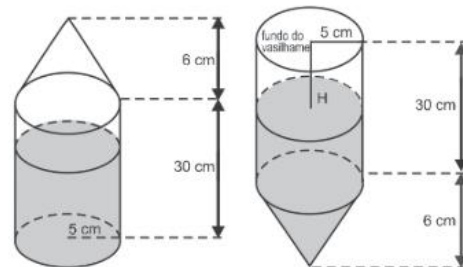
A 144°
B 192°
C 240°
D 288°
E 336°

9 **Fuvest** Um pedaço de cartolina possui a forma de um semicírculo de raio 20 cm. Com essa cartolina um menino constrói um chapéu cônico e o coloca com a base apoiada sobre a mesa.

Qual a distância do bico do chapéu à mesa?

A $10\sqrt{3}$ cm
B $3\sqrt{10}$ cm
C $20\sqrt{2}$ cm
D 20 cm
E 10 cm

10 **Enem** Um vasilhame na forma de um cilindro circular reto de raio da base de 5 cm e altura de 30 cm está parcialmente ocupado por 625π cm^3 de álcool. Suponha que sobre o vasilhame seja fixado um funil na forma de um cone circular reto de raio da base de 5 cm e altura de 6 cm, conforme ilustra a figura 1. O conjunto, como mostra a figura 2, é virado para baixo, sendo H a distância da superfície do álcool até o fundo do vasilhame.

Volume do cone: $V_{cone} = \frac{\pi r^2 h}{3}$.

Considerando-se essas informações, qual é o valor da distância H?

A 5 cm.
B 7 cm.
C 8 cm.
D 12 cm.
E 18 cm.

11 **Unesp 2014** Prato da culinária japonesa, o *temaki* é um tipo de sushi na forma de cone, enrolado externamente com nori, uma espécie de folha feita a partir de algas marinhas, e recheado com arroz, peixe cru, ovas de peixe, vegetais e uma pasta de maionese e cebolinha.

Um *temaki* típico pode ser representado matematicamente por um cone circular reto em que o diâmetro da base mede 8 cm e a altura 10 cm. Sabendo-se que, em um *temaki* típico de salmão, o peixe corresponde a 90% da massa do seu recheio, que a densidade do salmão é de 0,35 g/cm^3, e tomando $\pi = 3$, a quantidade aproximada de salmão, em gramas, nesse *temaki*, é de

A 46.
B 58.
C 54.
D 50.
E 62.

12 **FGV 2014** Um sorvete de casquinha consiste de uma esfera (sorvete congelado) de raio 3 cm e um cone circular reto também com 3 cm de raio. Se o sorvete derreter, ele encherá a casquinha completa e exatamente. Suponha que o sorvete derretido ocupe 80% do volume que ele ocupa quando está congelado. Calcule a altura da casquinha.

13 **Uece 2017** O volume de uma tradicional casquinha de sorvete, com formato de um cone, feito a partir de um setor circular de 12 cm de raio e ângulo central de 120 graus é igual a:

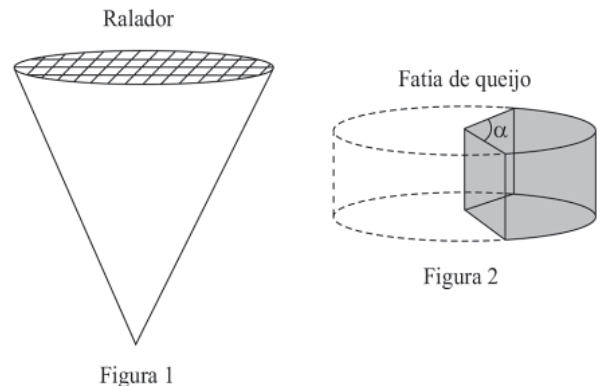
A $\frac{128\sqrt{2}\pi}{3}$ cm^3.
B $\frac{64\sqrt{3}\pi}{3}$ cm^3.
C $\frac{64\sqrt{2}\pi}{3}$ cm^3.
D $\frac{128\sqrt{3}\pi}{3}$ cm^3.

14 **UFU** Uma esfera maciça de ferro de raio 10 cm será fundida e todo o material derretido será usado na confecção de um cilindro circular e de um cone circular, ambos maciços com raio da base r cm e altura também r cm. Não havendo perda de material durante o processo, r será igual a

A 4 cm.
B 8 cm.
C 5 cm.
D 10 cm.

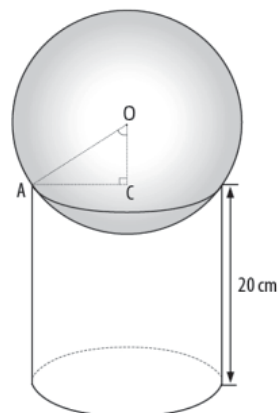
15 **Fuvest** Uma superfície esférica de raio 13 cm é cortada por um plano situado a uma distância de 12 cm do centro da superfície esférica, determinando uma circunferência.
O raio desta circunferência, em cm, é

A 1
B 2
C 3
D 4
E 5

16 **FGV-SP 2012** Um ralador de queijo tem a forma de cone circular reto de raio da base 4 cm e altura 10 cm. O queijo é ralado na base do cone e fica acumulado em seu interior (figura 1). Deseja-se retirar uma fatia de um queijo com a forma de cilindro circular reto de raio da base 8 cm e altura 6 cm, obtida por dois cortes perpendiculares à base, partindo do centro da base do queijo e formando um ângulo α (figura 2), de forma que o volume de queijo dessa fatia corresponda a 90% do volume do ralador.

Nas condições do problema, α é igual a

A 45°.
B 50°.
C 55°.
D 60°.
E 65°.

17 **FGV 2017 (Adapt.)** Uma bola de vidro que é uma esfera de centro O se encaixou num copo exatamente como mostra a figura. O raio da bola mede 13 cm e OC = 5 cm. O segmento $\overline{AC}$ é o raio do cilindro. O que tem o maior volume: a bola ou o copo?

FRENTE 3

18 **FGV-SP** As alturas de um cone circular reto de volume P e de um cilindro reto de volume Q são iguais ao diâmetro de uma esfera de volume R. Se os raios das bases do cone e do cilindro são iguais ao raio da esfera, então P – Q + R é igual a

A 0.

B $\frac{2\pi}{3}$.

C π.

D $\frac{4\pi}{3}$.

E 2π.

19 **Acafe 2017** Um cone de revolução tem altura 8 cm e está circunscrito a uma esfera de raio igual a 2 cm. A razão entre o volume da esfera e o volume do cone é igual a

A 1/4.

B 1/8.

C 1/2.

D 2.

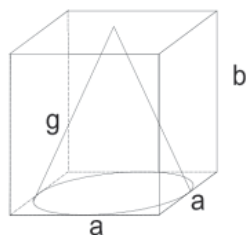
20 **Fuvest** Um cone circular reto está inscrito em um paralelepípedo reto retângulo, de base quadrada, como mostra a figura. A razão b/a entre as dimensões do paralelepípedo é 3/2 e o volume do cone é π. Então, o comprimento g da geratriz do cone é

A $\sqrt{5}$

B $\sqrt{6}$

C $\sqrt{7}$

D $\sqrt{10}$

E $\sqrt{11}$

21 **EEAR 2017** Um escultor irá pintar completamente a superfície de uma esfera de 6 m de diâmetro, utilizando uma tinta que, para essa superfície, rende 3 m^2 por litro. Para essa tarefa, o escultor gastará, no mínimo, ______ litros de tinta. (Considere $\pi = 3$)

A 18

B 24

C 36

D 48

22 **Efomm 2016** Seja uma esfera de raio R e um cubo de aresta A, ambos com a mesma área de superfície. A razão entre o volume do cubo e o volume da esfera é igual a

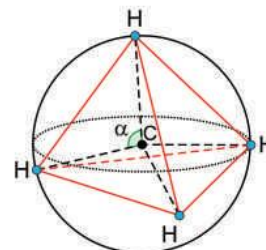
A $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

B $\sqrt{\frac{\pi}{12}}$.

C $\sqrt{\frac{2\pi}{3}}$.

D $\sqrt{\frac{\pi}{3}}$.

E $\sqrt{\frac{\pi}{6}}$.

23 **Unifesp 2015** O metano (CH_4) possui molécula de geometria tetraédrica (figura 1). Do ponto de vista matemático, isso significa que, em uma molécula de metano, os 4 átomos de hidrogênio localizam se idealmente nos vértices de um tetraedro regular, e o átomo de carbono localiza-se no centro da esfera que circunscreve esse tetraedro (figura 2). Nesse modelo de molécula, a distância entre um átomo de hidrogênio e o átomo de carbono é de 0,109 nanômetro (nm).

a) Sabendo que 1 nm = 10^{9} m, calcule, em milímetros, a medida da distância entre hidrogênio e carbono na molécula de metano. Registre sua resposta em notação científica.

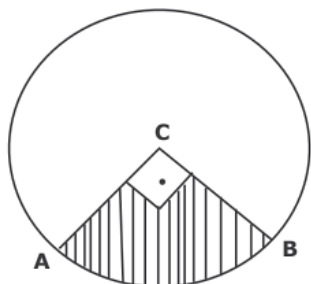
b) Uma importante propriedade do tetraedro regular é a de que, sendo P um ponto interior qualquer, a soma das distâncias de P às quatro faces do tetraedro será igual à altura do tetraedro. Nas condições do problema, isso equivale a dizer que a altura do tetraedro é igual a $\frac{4}{3}$ do raio da esfera.
Na figura 2, α indica a medida do ângulo de ligação HCH na molécula de metano. Considerando a tabela trigonométrica a seguir e as informações fornecidas, calcule o valor aproximado de α.

α (em grau)	senα	cosα	tgα
70	0,9397	0,3420	2,7475
70,5	0,9426	0,3338	2,8239
71	0,9455	0,3256	2,9042
71,5	0,9483	0,3173	2,9887
72	0,9511	0,3090	3,0777
72,5	0,9537	0,3007	3,1716
73	0,9563	0,2924	3,2709
73,5	0,9588	0,2840	3,3759
74	0,9613	0,2756	3,4874
74,5	0,9636	0,2672	3,6059
75	0,9659	0,2588	3,7321
75,5	0,9681	0,2504	3,8667
76	0,9703	0,2419	4,0108

Texto para as questões **24** e **25**.
Um sólido geométrico foi gerado pela revolução completa de um quadrado com 6 cm de lado em torno de uma reta paralela a um de seus lados afastada 5 cm do centro do quadrado.

24 Quanto mede o volume desse sólido?

25 Quanto mede a área da superfície total desse sólido?

26 **EsPCEx 2016** Corta-se de uma circunferência de raio 4 cm, um setor circular de ângulo $\frac{\pi}{2}$ rad (ver desenho ilustrativo), onde o ponto C é o centro da circunferência. Um cone circular reto é construído a partir desse setor circular ao se juntar os raios $\overline{CA}$ e $\overline{CB}$.

Desenho ilustrativo - fora de escala

O volume desse cone, em cm^3, é igual a

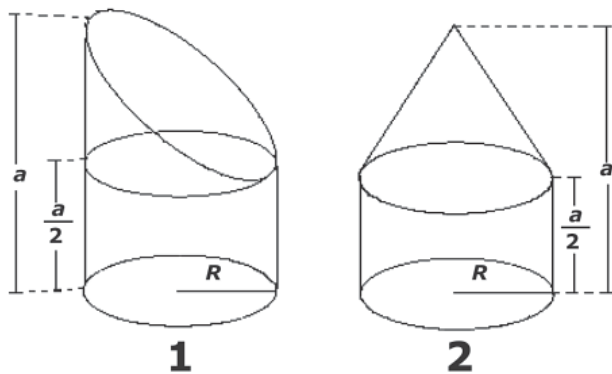
A $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$

B $\frac{\sqrt{3}}{5}\pi$

C $\frac{\sqrt{15}}{3}\pi$

D $\frac{\sqrt{15}}{5}\pi$

E $\frac{\sqrt{5}}{5}\pi$

27 **EsPCEx 2017** O valor da altura de um cilindro reto de raio R, cujo volume é a soma dos volumes dos sólidos 1 e 2 é

Desenho Ilustrativo Fora de Escala

A $\frac{13}{12}a$.

B $\frac{7}{6}a$.

C $\frac{5}{4}a$.

D $\frac{4}{3}a$.

E $\frac{17}{12}a$.

28 **EsPCEx 2017** A angioplastia é um procedimento médico caracterizado pela inserção de um cateter em uma veia ou artéria com o enchimento de um pequeno balão esférico localizado na ponta desse cateter. Considerando que, num procedimento de angioplastia, o raio inicial do balão seja desprezível e aumente a uma taxa constante de 0,5 mm/s até que o volume seja igual a 500 mm^3, então o tempo, em segundos, que o balão leva para atingir esse volume é

A 10.

B $10\sqrt[3]{\frac{5}{\pi}}$.

C $10\sqrt[3]{\frac{2}{\pi}}$.

D $10\sqrt[3]{\pi}$.

E $10\sqrt[3]{\frac{3}{\pi}}$.

29 **AFA 2017** Se uma pirâmide hexagonal regular está inscrita num cone equilátero cujo volume é igual a $\frac{10\sqrt{3}}{7}\pi$ cm^3, então o volume dessa pirâmide, em cm^3, é igual a

A $\frac{45}{7}$

B $\frac{15\sqrt{3}}{7}$

C $\frac{30\sqrt{3}}{7}$

D $\frac{135}{7}$

30 **AFA 2018** Considere o sólido geométrico obtido pela rotação de 360° do triângulo ABC em torno da reta que passa por C e é paralela ao lado $\overline{AB}$. Sabe-se que este triângulo é isósceles, com $AC \equiv BC = R\sqrt{2}$ m, AB = 2R m (sendo R uma constante real não nula), e que o volume do sólido obtido é $V = 4\pi\sqrt{3}$ m^3.
A medida de R, em metros, é igual a

A $\sqrt[6]{3}$

B $\sqrt[3]{3}$

C $\sqrt[3]{9}$

D $\sqrt{3}$

31 **AFA 2016** Considere a região E do plano cartesiano dada por

$$E = \begin{cases} \frac{y}{3} + \frac{x}{3} \leq 1 \\ y + x \geq 1 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

O volume do sólido gerado, se E efetuar uma rotação de 270° em torno do eixo $\overleftrightarrow{Ox}$, em unidades de volume, é igual a

A $\frac{26\pi}{3}$

B 26π

C $\frac{13\pi}{2}$

D $\frac{13\pi}{3}$

FRENTE 3

32 **AFA 2013** Uma caixa cúbica, cuja aresta mede 0,4 metros, está com água até $\frac{7}{8}$ de sua altura.

Dos sólidos geométricos abaixo, o que, totalmente imerso nessa caixa, **NÃO** provoca transbordamento de água é

A uma esfera de raio $\sqrt[3]{2}$ dm.
B uma pirâmide quadrangular regular, cujas arestas da base e altura meçam 30 cm.
C um cone reto, cujo raio da base meça $\sqrt{3}$ dm e a altura 3 dm.
D um cilindro equilátero, cuja altura seja 20 cm.

33 **AFA** Considere uma chapa de aço circular de espessura desprezível e raio 15 cm. Recortando-se, dessa chapa, dois setores circulares de ângulo $\frac{2\pi}{3}$ rad cada, e juntando-se em cada um desses setores os lados de mesma medida, sem perda de material, obtêm-se dois objetos em forma de cone. Unindo-se as bases desses cones, obtém-se um objeto **A**. Dentro desse objeto **A** foram inseridas esferas de ferro cuja área da superfície, de cada uma, é 9π cm^2. Sabendo-se que foram inseridas a maior quantidade possível dessas esferas dentro do objeto **A**, o espaço vago dentro desse objeto é tal que seu volume é, em cm^3, igual a

Dado: $\sqrt{2} = 1{,}41$.

A 2π B π C $\frac{\pi}{2}$ D $\frac{\pi}{4}$

34 **ITA 2019** A superfície lateral de um cone circular reto corresponde a um setor circular de 216°, quando planificada. Se a geratriz do cone mede 10 cm, então a medida de sua altura, em cm, é igual a

A 5.
B 6.
C 7.
D 8.
E 9.

35 **ITA 2019** Um cone circular reto, de altura h, e um cilindro circular reto têm bases de mesmo raio. O volume do cone é metade do volume do cilindro, e a área lateral do cone é igual à área lateral do cilindro. Determine, em função de h, o raio da esfera inscrita no cone.

36 **ITA 2016** Uma esfera S_1, de raio $R > 0$, está inscrita num cone circular reto K. Outra esfera, S_2, de raio r, com $0 < r < R$, está contida no interior de K e é, simultaneamente, tangente à esfera S_1 e à superfície lateral de K. O volume de K é igual a

A $\frac{\pi R^5}{3r(R \quad r)}$
B $\frac{2\pi R^5}{3r(R \quad r)}$
C $\frac{\pi R^5}{r(R \quad r)}$
D $\frac{4\pi R^5}{3r(R \quad r)}$
E $\frac{5\pi R^5}{3r(R \quad r)}$

37 **ITA 2016** Em um cone circular reto de altura 1 e raio da base 1 inscreve-se um tetraedro regular com uma de suas faces paralela à base do cone, e o vértice oposto coincidindo com o centro da base do cone. Determine o volume do tetraedro.

38 **ITA 2014** Considere o sólido de revolução obtido pela rotação de um triângulo isósceles ABC em torno de uma reta paralela à base $\overline{BC}$ que dista 0,25 cm do vértice A e 0,75 cm da base $\overline{BC}$. Se o lado $\overline{AB}$ mede $\frac{\sqrt{\pi^2+1}}{2\pi}$ cm, o volume desse sólido, em cm^3, é igual a

A $\frac{9}{16}$.
B $\frac{13}{96}$.
C $\frac{7}{24}$.
D $\frac{9}{24}$.
E $\frac{11}{96}$.

39 **ITA 2014** Seis esferas de mesmo raio R são colocadas sobre uma superfície horizontal de tal forma que seus centros definam os vértices de um hexágono regular de aresta 2R. Sobre estas esferas é colocada uma sétima esfera de raio 2R que tangencia todas as demais. Determine a distância do centro da sétima esfera à superfície horizontal.

40 **ITA 2012** A superfície lateral de um cone circular reto é um setor circular de 120° e área igual a 3π cm^2. A área total e o volume deste cone medem, em cm^2 e cm^3, respectivamente

A 4π e $\frac{2\pi\sqrt{2}}{3}$.
B 4π e $\frac{\pi\sqrt{2}}{3}$.
C 4π e $\pi\sqrt{2}$.
D 3π e $\frac{2\pi\sqrt{2}}{3}$.
E π e $2\pi\sqrt{2}$.

41 **ITA 2011** Uma esfera está inscrita em uma pirâmide regular hexagonal cuja altura mede 12 cm e a aresta da base mede $\frac{10}{3}\sqrt{3}$ cm. Então o raio da esfera, em cm, é igual a

A $\frac{10}{3}\sqrt{3}$.
B $\frac{13}{3}$.
C $\frac{15}{4}$.
D $2\sqrt{3}$.
E $\frac{10}{3}$.

42 **ITA 2011** Considere uma esfera Ω com centro em C e raio r = 6 cm e um plano Σ que dista 2 cm de C. Determine a área da intersecção do plano Σ com uma cunha esférica de 30° em Ω que tenha aresta ortogonal a Σ.

43 **ITA** As superfícies de duas esferas se interceptam ortogonalmente (isto é, em cada ponto da interseção os respectivos planos tangentes são perpendiculares). Sabendo que os raios destas esferas medem 2 cm e $\frac{3}{2}$ cm, respectivamente, calcule

a) a distância entre os centros das duas esferas.
b) a área da superfície do sólido obtido pela interseção das duas esferas.

44 **ITA** Uma esfera é colocada no interior de um cone circular reto de 8 cm de altura e de 60° de ângulo do vértice. Os pontos de contato da esfera com a superfície lateral do cone definem uma circunferência e distam $2\sqrt{3}$ cm do vértice do cone. O volume do cone não ocupado pela esfera, em cm^3, é igual a

A $\frac{416}{9}\pi$.
B $\frac{480}{9}\pi$.
C $\frac{500}{9}\pi$.
D $\frac{512}{9}\pi$.
E $\frac{542}{9}\pi$.

45 **ITA** Os quatro vértices de um tetraedro regular, de volume 8/3 cm^3, encontram-se nos vértices de um cubo. Cada vértice do cubo é centro de uma esfera de 1 cm de raio. Calcule o volume da parte do cubo exterior às esferas.

46 **ITA** Uma esfera de raio r é seccionada por *n* planos meridianos. Os volumes das respectivas cunhas esféricas contidas em uma semiesfera formam uma progressão aritmética de razão $\frac{\pi r^3}{45}$. Se o volume da menor cunha for igual a $\frac{\pi r^3}{18}$, então *n* é igual a

A 4.
B 3.
C 6.
D 5.
E 7.

47 **ITA** A área total da superfície de um cone circular reto, cujo raio da base mede R cm, é igual à terça parte da área de um círculo de diâmetro igual ao perímetro da seção meridiana do cone. O volume deste cone, em cm^3, é igual a:

A πR^3
B $\pi\sqrt{2}R^3$
C $\frac{\pi}{\sqrt{2}}R^3$
D $\pi\sqrt{3}\pi R^3$
E $\frac{\pi}{\sqrt{3}}R^3$

48 **ITA** Considere o triângulo isósceles OAB, com lados $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ de comprimento $\sqrt{2}R$ e lado $\overline{AB}$ de comprimento 2R. O volume do sólido, obtido pela rotação deste triângulo em torno da reta que passa por O e é paralela ao lado $\overline{AB}$, é igual a:

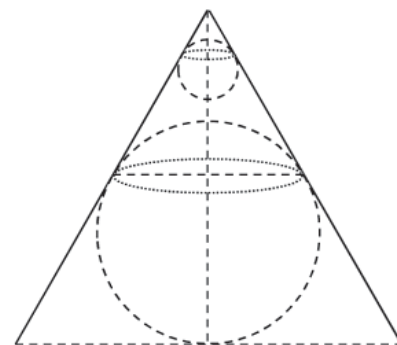
A $\frac{\pi}{2}R^3$
B πR^3
C $\frac{4\pi}{3}R^3$
D $\sqrt{2}\pi R^3$
E $\sqrt{3}\pi R^3$

49 **ITA** Quatro esferas de mesmo raio R > 0 são tangentes externamente duas a duas, de forma que seus centros formam um tetraedro regular com arestas de comprimento 2R. Determine, em função de R, a expressão do volume do tetraedro circunscrito às quatro esferas.

50 **ITA** Seja S a área total da superfície de um cone circular reto de altura h, e seja *m* a razão entre as áreas lateral e da base desse cone. Obtenha uma expressão que forneça h em função apenas de S e *m*.

51 **IME 2019** Um cubo com diagonal principal $\overline{AG}$ é interceptado pelo plano α, perpendicular à $\overline{AG}$, formando uma seção hexagonal regular. Calcule, em função da aresta a do cubo:

a) o apótema dessa seção hexagonal;
b) o raio da esfera que é tangente a essa seção e às faces do cubo que contém o vértice A.

52 **IME 2017** Em um cone equilátero são inscritas duas esferas de raios $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$ R e R, conforme a figura abaixo. Um plano secante ao cone é traçado de forma que este seja tangente às duas esferas. Determine em termos de R o maior segmento possível que une dois pontos da curva formada pela interseção do referido plano com o cone.

53 **IME 2016** Um cone é inscrito em um cubo ABCDEFGH de forma que a base do cone é o círculo inscrito na base ABCD. O vértice do cone é o centro da face oposta do cubo. A projeção do vértice H na base ABCD coincide com o vértice D. Determine a área da seção do cone pelo plano ABH em função de *a*, a medida da aresta do cubo.

54 **IME 2013** Considere uma pirâmide regular de base hexagonal e altura h. Uma esfera de raio R está inscrita nesta pirâmide. O volume desta pirâmide é

A $\frac{2h\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{R^2h}{h-2R}$

B $\frac{h\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{R^2h}{h+2R}$

C $\frac{2h\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{R^2h}{h+2R}$

D $\frac{h\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{R^2h}{h\quad 2R}$

E $\frac{2h\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{R^2h}{h-R}$

55 **IME** Sejam ABC um triângulo equilátero de lado 2 cm e r uma reta situada no seu plano, distante 3 cm do seu baricentro. Calcule a área da superfície gerada pela rotação deste triângulo em torno da reta r.

A 8π cm^2
B 9π cm^2
C 12π cm^2
D 16π cm^2
E 36π cm^2

56 **IME** A área de uma calota esférica é o dobro da área do seu círculo base. Determine o raio do círculo base da calota em função do raio R da esfera.

57 **IME** Sejam C e C* dois círculos tangentes exteriores de raios r e r* e centros O e O*, respectivamente, e seja t uma reta tangente comum a C e C* nos pontos não coincidentes A e A*. Considere o sólido de revolução gerado a partir da rotação do segmento $\overline{AA^*}$ em torno do eixo $\overline{OO^*}$, e seja S a sua correspondente área lateral. Determine S em função de r e r*.

58 **IME** Considere um tetraedro regular de arestas de comprimento *a* e uma esfera de raio R tangente a todas as arestas do tetraedro. Em função de *a*, calcule:

a) o volume total da esfera;
b) o volume da parte da esfera situada no interior do tetraedro.

59 **IME** Um cone e um cilindro circulares retos têm uma base comum e o vértice do cone se encontra no centro da outra base do cilindro. Determine o ângulo formado pelo eixo do cone e sua geratriz, sabendo-se que a razão entre a área total do cilindro e a área total do cone é $\frac{7}{4}$.

fergregory/iStockphoto.com

Templo de Kukulcán ou Pirâmide de Kukulcán, "El Castillo", construído no século XII d.C. pelos maias itzáes na antiga cidade de Chichén Itzá, na Península de Iucatã, no México.

FRENTE 3

CAPÍTULO

16

Troncos

Nos capítulos anteriores, foram apresentados diversos tipos de sólidos, poliedros e corpos redondos. Agora, nosso objeto de estudo passa a ser os troncos. Observe, na imagem, a pirâmide maia Chichén Itzá, que foi nomeada uma das Novas Sete Maravilhas do Mundo. Note que, apesar de a chamarmos de pirâmide, tecnicamente ela é formada por uma superposição de troncos de pirâmide.

Introdução

Inicialmente veja os seguintes exemplos e reflita sobre cada situação mencionada.

Primeiro, citamos os três túneis de vento localizados no Instituto de Aeronáutica e Espaço (IAE), organismo do Departamento de Ciência e Tecnologia Aeroespacial (DCTA), em São José dos Campos (SP). Entre esses túneis, está o TA 2, reconhecido como o maior da América Latina; nele são testados diferentes modelos de aeronaves para aperfeiçoar sua aerodinâmica.

Fig. 1 Modelo de aeronave em túnel de vento no IAE.

Outro exemplo a ser analisado são as maquetes. No caso de construções, elas nos permitem ver a espacialidade de um edifício, estudar sua iluminação, fazer alterações e análises no projeto, sem a necessidade de construí-lo efetivamente, o que pode corresponder a muita economia.

Fig. 2 Oscar Niemeyer e maquete da Catedral Metropolitana Nossa Senhora Aparecida, em Brasília.

O terceiro e último exemplo são as miniaturas de automóveis de luxo. Quem nunca pensou em ter carros como esses? Por algumas dezenas de reais você pode ter diversos... em miniatura!

Fig. 3 Miniaturas de automóveis.

Todos os casos mencionados estão relacionados a um dos assuntos deste capítulo: a semelhança de sólidos.

Semelhança de sólidos

Informalmente, podemos dizer que dois sólidos são semelhantes se tiverem a mesma forma, mas não necessariamente o mesmo tamanho. Isso ocorre nos exemplos apontados na introdução deste capítulo. Modelos de aeronaves em túneis de vento, maquetes de construções e miniaturas de carro são, respectivamente, semelhantes às aeronaves, aos edifícios e aos carros em tamanho natural. Mas, afinal, quais seriam os atributos da semelhança e o que esses exemplos têm em comum?

Ao tentarmos responder a essa questão, nos ocorrem dois conceitos: igual proporção entre os comprimentos de todos os pares de segmentos homólogos e a igualdade de medida entre ângulos homólogos.

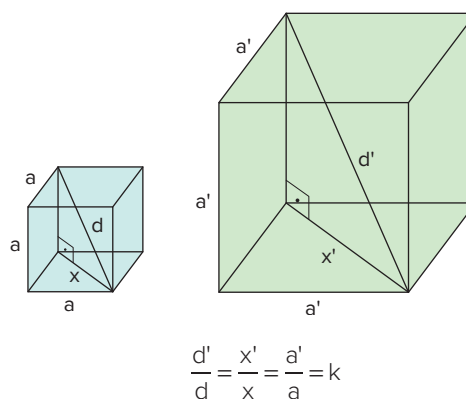



Fig. 4 Cubos semelhantes têm mesma proporção entre segmentos homólogos.

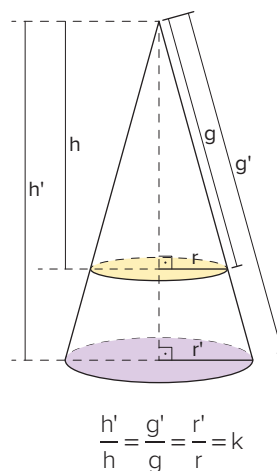
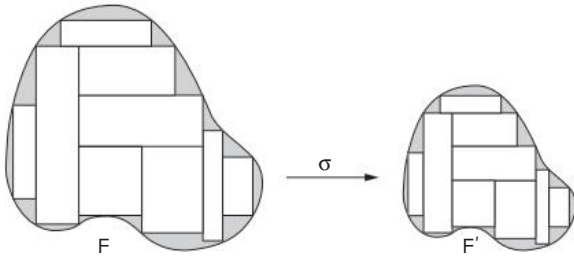



Fig. 5 Cones semelhantes têm mesma proporção entre segmentos homólogos.

Para analisar o que ocorre com as áreas de duas figuras planas **semelhantes**, precisamos lembrar primeiro o que acontece com as áreas no caso de as figuras serem dois retângulos. Sendo b e h as respectivas medidas da base e da altura de um retângulo, sua área é $A_1 = b \cdot h$. Tomando outro retângulo, **semelhante** ao primeiro, com razão k e, portanto, com base e altura respectivamente iguais a $k \cdot b$ e $k \cdot h$, sua área é dada por $A_2 = kb \cdot kh = k^2 \cdot bh = k^2 \cdot A_1$. Assim, a razão entre as áreas dos dois retângulos é igual a k^2.

Agora, seja uma **semelhança σ** de razão k entre duas figuras F e F'. Cada retângulo de F é transformado em outro retângulo **semelhante** em F', com razão k^2.

Então, a área de F' é o número real cuja aproximação por falta é k^2 vezes a área de F. Logo, a razão entre as áreas de F e F' é k^2.

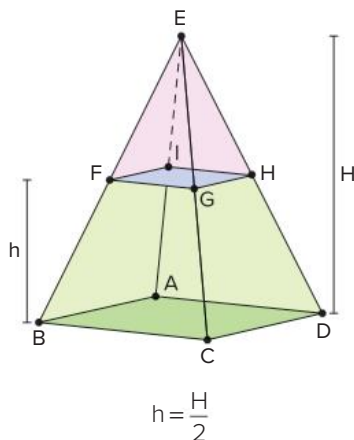
Um fenômeno análogo ocorre entre o volume de dois sólidos **semelhantes** com razão k. Se subdividirmos os dois sólidos em paralelepípedos **semelhantes**, a razão entre os volumes de cada par de paralelepípedos será igual a k^3. Assim, a razão entre o volume de dois sólidos **semelhantes** é igual a k^3.

Como exemplo, imaginemos dois cubos, um com aresta de 1 m e outro com aresta de 2 m. Os dois cubos são **semelhantes** com razão k = 2. As razões entre as áreas de suas superfícies e entre seus volumes são dadas respectivamente por:

$$\frac{A'}{A} = \frac{6 \cdot 2^2 m^2}{6 \cdot 1^2 m^2} = \frac{24\ m^2}{6\ m^2} = 4 = k^2$$

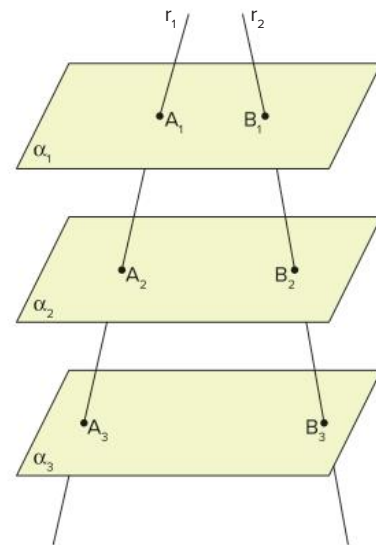
$$\frac{V'}{V} = \frac{2^3 m^3}{1^3 m^3} = \frac{8\ m^3}{1\ m^3} = 8 = k^3$$

Uma situação bastante usual em questões é aquela em que seccionamos a pirâmide por um plano, paralelo à base, dividindo a altura ao meio.

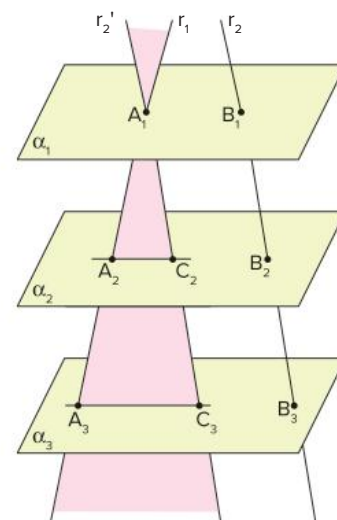
$$h = \frac{H}{2}$$

A razão de **semelhança** entre a pirâmide menor e a pirâmide original é $k = \frac{h}{H} = \frac{1}{2}$. Logo, a razão entre os volumes da pirâmide menor e da maior é igual a $k^3 = \frac{1}{8}$. Isso significa que, se a pirâmide maior tem volume V, ela fica dividida em dois sólidos: a pirâmide menor com volume $\frac{V}{8}$ e o tronco de pirâmide com volume $\frac{7V}{8}$.

Semelhança de sólidos e paralelismo

O **teorema de Tales** para planos paralelos afirma que três ou mais planos paralelos determinam segmentos proporcionais sobre duas retas secantes quaisquer.

Sejam os planos $\alpha_1 // \alpha_2 // \alpha_3$ e duas retas r_1 e r_2 secantes aos três planos nos pontos A_1, A_2, A_3, B_1, B_2 e B_3, conforme figura a seguir, temos: $\frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3}$.

Demonstração

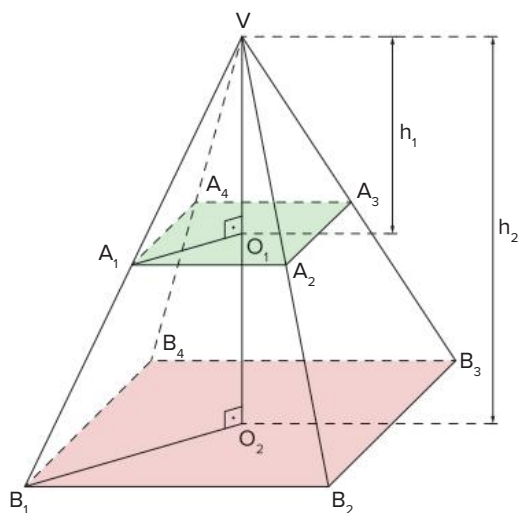
Por A_1, traçamos a reta r_2' paralela à r_2, que intercepta α_2 e α_3 em C_2 e C_3, respectivamente. Nos paralelogramos $A_1B_1B_2C_2$ e $C_2B_2B_3C_3$, temos $A_1C_2 = B_1B_2$ e $C_2C_3 = B_2B_3$.

FRENTE 3

No plano determinado por r_1 e r_2', as retas $\overleftrightarrow{A_2C_2}$ e $\overleftrightarrow{A_3C_3}$ são paralelas. Aplicando o teorema de Tales ao triângulo $A_1A_3C_3$, temos:

$$\frac{A_1C_2}{C_2C_3} = \frac{A_1A_2}{A_2A_3}$$

Como $A_1C_2 = B_1B_2$ e $C_2C_3 = B_2B_3$, temos:

$$\frac{B_1B_2}{B_2B_3} = \frac{A_1A_2}{A_2A_3} \Leftrightarrow \frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3}$$

Como consequência do resultado anterior, temos o seguinte efeito: ao seccionarmos uma pirâmide ou cone por um plano paralelo à sua base, geramos um sólido (pirâmide ou cone) **semelhante** ao sólido original e com razão de **semelhança** igual à razão entre as alturas. Veja a seguir:

Pelo teorema de Tales, temos:

$$\frac{VA_1}{VB_1} = \frac{VA_2}{VB_2} = \frac{VA_3}{VB_3} = \frac{VA_4}{VB_4} = k$$

Devido ao paralelismo, encontramos:

$$\Delta VA_1A_2 \sim \Delta VB_1B_2,\ \Delta VA_2A_3 \sim \Delta VB_2B_3,$$
$$\Delta VA_3A_4 \sim \Delta VB_3B_4 \text{ e } \Delta VA_4A_1 \sim \Delta VB_4B_1$$

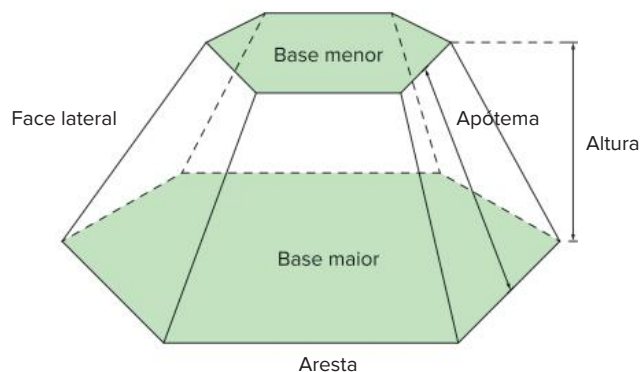
com a mesma razão $\frac{VA_1}{VB_1} = \frac{VA_2}{VB_2} = \frac{VA_3}{VB_3} = \frac{VA_4}{VB_4} = k$.

Assim: $\frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3} = \frac{A_3A_4}{B_3B_4} = \frac{A_4A_1}{B_4B_1} = k$.

O resultado mostra que as arestas homólogas das pirâmides $VA_1A_2A_3A_4$ e $VB_1B_2B_3B_4$ são igualmente proporcionais, ou seja, as pirâmides são semelhantes.

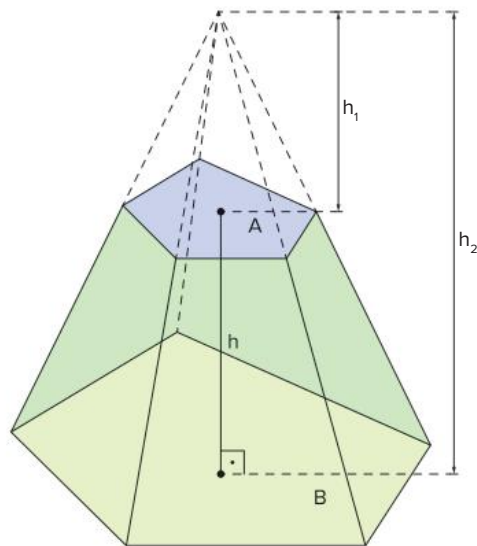
Os triângulos VA_1O_1 e VB_1O_2 são semelhantes com razão $\frac{VO_1}{VO_2} = \frac{VA_1}{VB_1} = k$. Como $VO_1 = h_1$ e $VO_2 = h_2$, temos $k = \frac{VO_1}{VO_2} = \frac{h_1}{h_2}$. Assim, concluímos que a razão de semelhança entre as pirâmides $VA_1A_2A_3A_4$ e $VB_1B_2B_3B_4$ é igual à razão entre suas alturas.

Tronco de pirâmide

É assim denominada a parte da pirâmide compreendida entre sua base e uma seção paralela à base. Sua altura é a distância entre os planos paralelos que contêm as duas bases. Na figura a seguir, temos os elementos do tronco de pirâmide.

Se um tronco de pirâmide tem bases de áreas A e B e altura h, então seu volume é dado por:

$$V = \frac{h}{3}\left(A + B + \sqrt{A \cdot B}\right)$$

Demonstração

Sejam h_1 e h_2 as alturas da pirâmide seccionada e da pirâmide original. Como vimos anteriormente, essas duas pirâmides são semelhantes com razão $k = \frac{h_1}{h_2}$.

Dessa forma, $h_1 = k \cdot h_2$, e a altura do tronco é dada por $h = h_2 - h_1 = (1 - k)h_2$.

A razão entre a área das bases é dada por $\frac{A}{B} = k^2 = \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2$. Logo: $\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} = k$.

A razão entre os volumes é dada por:

$$\frac{V_1}{V_2} = k^3 = \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^3 \Rightarrow V_1 = k^3 \cdot V_2$$

O volume do tronco é dado pela diferença entre o volume das duas pirâmides:

$$V = V_2 - V_1 = V_2 - k^3V_2 = (1 - k^3)V_2$$

Lembrando que $V_2 = \frac{1}{3}B \cdot h_2$ e que a fatoração de $1 - k^3$ é dada por $1 - k^3 = (1 - k)(1^2 + 1 \cdot k + k^2)$ (diferença de cubos), temos:

$$V = (1-k)(1+k+k^2)\frac{Bh^2}{3} \Rightarrow V = \frac{1}{3}(1-k) \cdot h_2 \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} + \frac{A}{B}\right) \cdot B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3}h\left(B + \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} \cdot \sqrt{B} \cdot \sqrt{B} + \frac{A}{B} \cdot B\right) \Rightarrow V = \frac{h}{3}\left(A + B + \sqrt{A \cdot B}\right)$$

Tronco de cone

É assim denominada a parte do cone compreendida entre sua base e uma seção paralela à base. Sua altura é a distância entre os planos paralelos que contêm as duas bases.

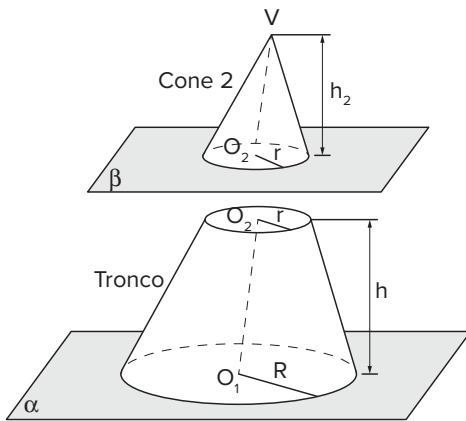



Fig. 6 Cone seccionado em cone semelhante e tronco.

Seja um tronco de cone de altura h e raios das bases R e r. As áreas das bases são dadas, respectivamente, por $A = \pi R^2$ e $B = \pi r^2$.

De maneira inteiramente análoga à demonstração feita para volume do tronco de pirâmide, provamos que o volume do tronco de cone é dado por:

$$V = \frac{h}{3}\left(A + B + \sqrt{A \cdot B}\right)$$

Substituindo A e B, temos:

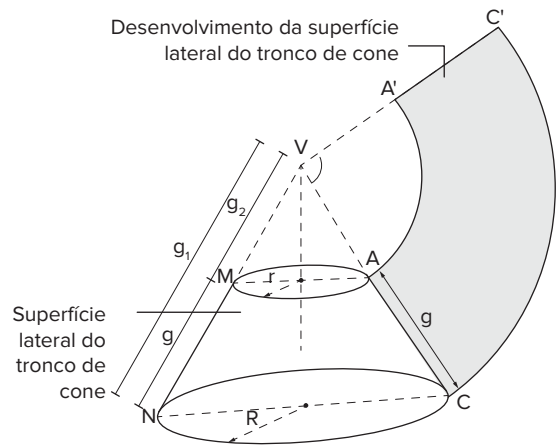
$$V = \frac{h}{3}\left(\pi R^2 + \pi r^2 + \sqrt{\pi R^2 \cdot \pi r^2}\right)$$

$$V = \frac{h}{3}(\pi R^2 + \pi r^2 + \pi Rr)$$

$$V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + Rr)$$

Desenvolvimento da superfície lateral do tronco de cone reto

A área da superfície lateral de um tronco de cone de raios r e R e geratriz g é dada por:

$$A_{\text{superfície lateral}} = \pi(R + r) \cdot g$$

Demonstração

Da semelhança entre o cone seccionado e o cone original temos: $\frac{r}{R} = \frac{g_2}{g_1} \Leftrightarrow g_2 = \frac{r}{R}g_1$.

Assim: $g = g_1 - g_2 = g_1 - \frac{r}{R}g_1 = \left(\frac{R-r}{R}\right)g_1$.

A área lateral do tronco é a diferença entre as áreas do cone grande e do pequeno. Assim:

$$A_{\text{superfície lateral}} = \pi R g_1 - \pi r g_2 = \pi(Rg_1 - rg_2)$$

$$A_{\text{superfície lateral}} = \pi\left(Rg_1 - \frac{r}{R}rg_1\right) = \pi\left(\frac{R^2 - r^2}{R}\right)g_1$$

$$A_{\text{superfície lateral}} = \pi(R+r)\left(\frac{R-r}{R}\right)g_1$$

$$A_{\text{superfície lateral}} = \pi(R+r)g$$

Exercícios resolvidos

1 Insper 2015 O rótulo de uma embalagem de suco concentrado sugere que o mesmo seja preparado na proporção de sete partes de água para uma parte de suco, em volume. Carlos decidiu preparar um copo desse suco, mas dispõe apenas de copos cônicos, mais precisamente na forma de cones circulares retos. Para seguir exatamente as instruções do rótulo, ele deve acrescentar no copo, inicialmente vazio, uma quantidade de suco até

A metade da altura.
B um sétimo da altura.
C um oitavo da altura.
D seis sétimos da altura.
E sete oitavos da altura.

Resolução:

Ao seccionarmos o cone na metade da altura, obtemos um cone com um oitavo do volume do cone original. Então, devemos acrescentar o suco até metade da altura do copo e, depois, completar com a água; assim, teremos um oitavo de suco e sete oitavos de água.
Alternativa: A

2 Determine a que distância do vértice devemos seccionar uma pirâmide ou cone de altura h para obter dois sólidos de mesmo volume.

Resolução:

Seja x a distância pedida. O sólido que mantém o vértice é uma pirâmide (ou cone) semelhante ao original e com altura x. Se ele tem volume v e o original volume V, encontramos: $\frac{v}{V} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{x}{h}\right)^3 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{h}{\sqrt[3]{2}}$.

3 **PUC-Campinas 2017** Considere dois troncos de *pirâmides* retas exatamente iguais. A base maior é um quadrado de lado igual a 2 metros, a base menor um quadrado de lado igual a 1 metro, e a distância entre as bases igual a 1 metro. Um monumento foi construído justapondo-se esses dois troncos nas bases menores, apoiando-se em um piso plano por meio de uma das bases maiores, formando um sólido. Desta maneira, a medida da área da superfície exposta do monumento é, em m^2, igual a

A $4+6\sqrt{5}$.
B 8.
C $12\sqrt{2}+4$.
D $\frac{16}{3}$.
E $12\sqrt{2}-8$.

Resolução:

As faces laterais de cada tronco são trapézios de base menor 1 metro e base maior 2 metros. Sendo h a altura do trapézio, temos: $h^2 = 1^2 + \left(\frac{2-1}{2}\right)^2 \Rightarrow h = \frac{\sqrt{5}}{2}\ m^2$.

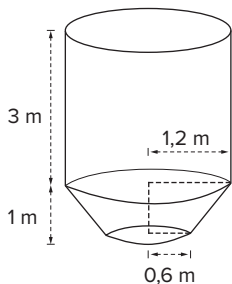
A área de cada um dos trapézios será:

$$\frac{(2+1)\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}}{2} = \frac{3\sqrt{5}}{4}\ m^2.$$

A área lateral de cada tronco será: $4\cdot\frac{3\sqrt{5}}{4} = 3\sqrt{5}\ m^2$.

A área lateral do monumento será igual a $6\sqrt{5}\ m^2$ e a área da base maior exposta (topo do monumento) será igual a 4 m^2. Assim, a área total exposta será igual a $4+6\sqrt{5}\ m^2$.

Alternativa: A

4 **UPF 2016** Um reservatório de água tem formato de um cilindro circular reto de 3 m de altura e base com 1,2 m de raio, seguido de um tronco de cone reto cujas bases são círculos paralelos, de raios medindo 1,2 m e 0,6 m respectivamente, e altura 1 m, como representado na figura a seguir.

Nesse reservatório, há um vazamento que desperdiça $\frac{1}{3}$ do seu volume por semana.

Considerando a aproximação $\pi \cong 3$ e sabendo que $1\ dm^3 = 1\ \ell$, esse vazamento é de:

A 4 320 litros.
B 15,48 litros.
C 15 480 litros.
D 12 960 litros.
E 5 160 litros.

Resolução:

Lembrando que o volume do cilindro de raio R e altura h é $\pi R^2 h$, e o volume do tronco de cone de raios R e r e altura h é $V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + Rr)$, o volume do reservatório, em decímetros cúbicos (litros), é dado por:

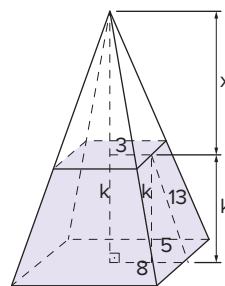
$$V_{reservatório} = \pi\cdot 12^2\cdot 30 + \frac{\pi\cdot 10}{3}(12^2+6^2+12\cdot 6) \cong$$
$$\cong 12\,960 + 2\,520 \cong 15\,480\ dm^3$$

Assim, tem-se que a resposta é $\frac{1}{3}\cdot 15480 = 5160\ \ell$.

Alternativa: E

5 Um engenheiro está projetando uma caixa-d'água de concreto em forma de tronco de pirâmide regular e reta, de bases quadradas, com as seguintes medidas internas: base menor de lado 6 m, base maior de lado 16 m e com altura da face lateral de 13 m. A capacidade de armazenamento da caixa-d'água é de:

A 1 432 000 litros.
B 1 552 litros.
C 1 552 000 litros.
D 1 681,33 litros.
E 1 681 333 litros.

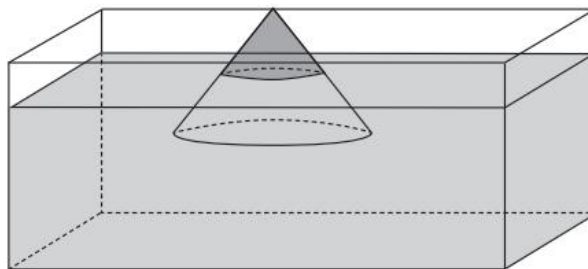
Resolução:

Temos que: $k^2 + 5^2 = 13^2 \Leftrightarrow k^2 = 144 \Leftrightarrow k = 12$ km.

O volume V do tronco:

$$V = \frac{k}{3}\left(A+B+\sqrt{A\cdot B}\right)$$
$$V = \frac{12}{3}\left(16^2+6^2+\sqrt{16^2\cdot 6^2}\right)$$
$$V = 4(256+36+96)$$
$$V = 1552\ m^3 = 1\,552\,000\ \ell$$

Alternativa: C

Revisando

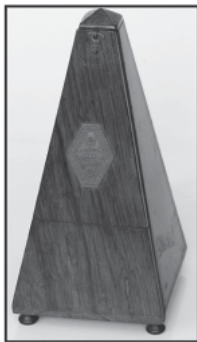
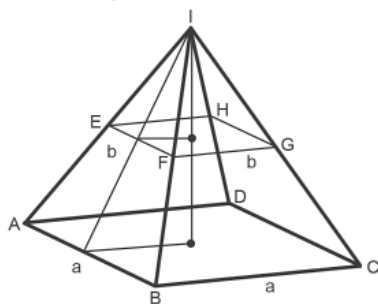
1 Uerj 2011 Um sólido com a forma de um cone circular reto, constituído de material homogêneo, flutua em um líquido, conforme a ilustração abaixo.

Se todas as geratrizes desse sólido forem divididas ao meio pelo nível do líquido, a razão entre o volume submerso e o volume do sólido será igual a:

A $\frac{1}{2}$

B $\frac{3}{4}$

C $\frac{5}{6}$

D $\frac{7}{8}$

2 **PUC-RS** O metrônomo é um relógio que mede o tempo musical (andamento). O metrônomo mecânico consiste num pêndulo oscilante, com a base fixada em uma caixa com a forma aproximada de um tronco de pirâmide, como mostra a foto.

Na representação a seguir, *a* é o lado da base maior, *b* é o lado da base menor e V é o volume do tronco de pirâmide ABCDEFGH. Se a = 4b e P é o volume total da pirâmide ABCDI, então:

A $V = \frac{3}{4}P$

B $V = \frac{3}{16}P$

C $V = \frac{15}{16}P$

D $V = \frac{15}{64}P$

E $V = \frac{63}{64}P$

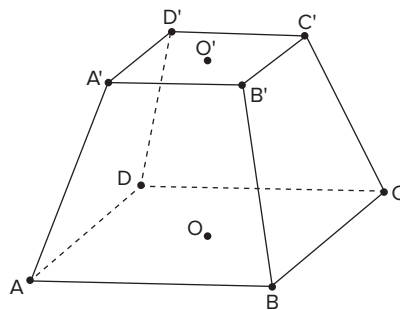
3 **Acafe 2016** Uma peça de madeira tem a forma de uma pirâmide hexagonal regular com 21 cm de altura. Essa peça é seccionada por um plano paralelo à base, de forma que o volume da pirâmide obtida seja $\frac{8}{27}$ do volume da pirâmide original.

A distância (em cm) da base da pirâmide até essa secção é um número:

A fracionário.
B primo.
C múltiplo de 3.
D quadrado perfeito.

4 **USF 2016** Um funil de vidro, em formato de tronco de cone e cilindro, de espessura desprezível, é utilizado para envasar frascos de remédios. Suas dimensões são indicadas na figura.

Cada frasco a ser envasado possui a mesma capacidade desse funil. Sabe-se que 5 L de xarope caseiro serão envasados. Determine o número mínimo de frascos necessários para o envase. (Use $\pi \cong 3,14$).

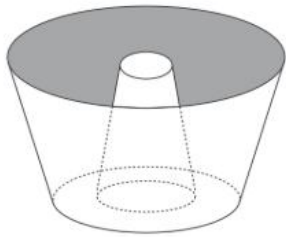
5 **FGV-RJ 2016** A figura abaixo mostra um tronco de pirâmide regular formado por dois quadrados ABCD e A'B'C'D' de centros O e O' contidos em planos paralelos e quatro trapézios congruentes. Os quadrados são as bases do tronco e a sua altura é a distância OO' = h entre os planos paralelos.

Se S e S' são as áreas das bases de um tronco de pirâmide de altura h, o volume desse tronco é dado pela fórmula $V = \frac{h}{3}\left(S + S'' + \sqrt{SS'}\right)$.

São dadas, em decímetros, as medidas das arestas: AB = 12, A'B' = 6, AA' = 9.

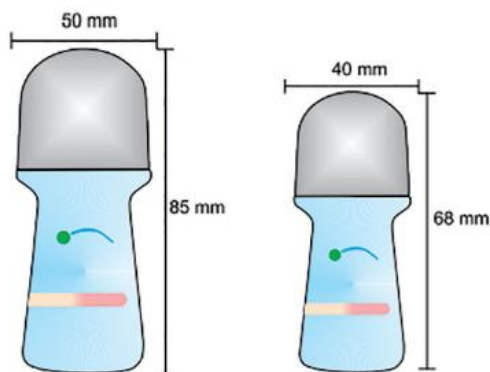
Calcule o volume desse poliedro em decímetros cúbicos e dê um valor aproximado, usando algum dos dados abaixo.

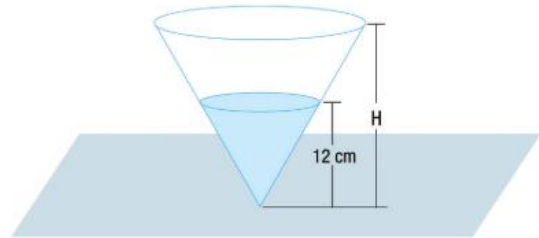
Dados: $\sqrt{2} \cong 1,41$, $\sqrt{3} \cong 1,73$, $\sqrt{5} \cong 2,24$ e $\sqrt{7} \cong 2,65$.

Exercícios propostos

1 **Enem 2013** Uma cozinheira, especialista em fazer bolos, utiliza uma forma no formato representado na figura:

Nela identifica-se a representação de duas figuras geométricas tridimensionais.
Essas figuras são
A um tronco de cone e um cilindro.
B um cone e um cilindro.
C um tronco de pirâmide e um cilindro.
D dois troncos de cone.
E dois cilindros.

2 **UFC** Ao seccionarmos um cone circular reto por um plano paralelo a sua base, cuja distância ao vértice do cone é igual a um terço da sua altura, obtemos dois sólidos: um cone circular reto S_1 e um tronco de cone S_2. A relação $\frac{\text{volume }(S_2)}{\text{volume }(S_1)}$ é igual a:
A 33.
B 27.
C 26.
D 9.
E 3.

3 **Famerp 2017** Um desodorante é vendido em duas embalagens de tamanhos diferentes, porém de formatos matematicamente semelhantes. A figura indica algumas das medidas dessas embalagens.

Se a capacidade da embalagem maior é de 100 mL, a capacidade da embalagem menor é de
A 64,0 mL
B 48,6 mL
C 56,4 mL
D 80,0 mL
E 51,2 mL

4 **Uerj** A figura abaixo representa um recipiente cônico com solução aquosa de hipoclorito de sódio a 27%. O nível desse líquido tem 12 cm de altura.

Para o preparo de um desinfetante, diluiu-se a solução inicial com água, até completar o recipiente, obtendo-se a solução aquosa do hipoclorito de sódio a 8%.
Esse recipiente tem altura H, em centímetros, equivalente a:
A 16
B 18
C 20
D 22

5 **IFSC 2016 (Adapt.)** Suponha que o copo representado na figura abaixo tenha sido utilizado na Oktoberfest para servir chopp. Admitindo que o copo é um tronco de cone e que $\pi = 3$, é **CORRETO** afirmar que a capacidade total, em mL, desse copo é

A maior que 600 mL.
B entre 300 mL e 400 mL.
C maior que meio litro e menor que 0,6 L.
D entre 200 mL e 300 mL.
E menor que 200 mL.

6 **Uece 2015** Um cone circular reto, cuja medida do raio da base é R, é cortado por um plano paralelo a sua base, resultando dois sólidos de volumes iguais. Um destes sólidos é um cone circular reto, cuja medida do raio da base é r. A relação existente entre R e r é
A $R^3 = 3r^3$.
B $R^2 = 2r^2$.
C $R^3 = 2r^3$.
D $R^2 = 3r^2$.

7 Insper 2016 No filme "*Enrolados*", os estúdios Disney recriaram a torre onde vivia a famosa personagem dos contos de fadas Rapunzel (figura 1). Nesta recriação, podemos aproximar o sólido onde se apoiava a sua morada por um cilindro circular reto conectado a um tronco de cone, com as dimensões indicadas na figura 2, feita fora de escala.

Figura 1
Disponível em: http://g1.globo.com/pop-art/noticia/2010/08/disney-divulga-poster de-rapunzel.html. Acesso em 16.10.15.

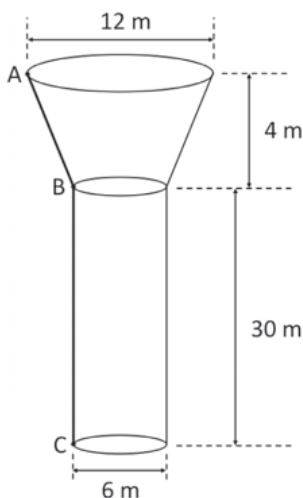



Figura 2

Para que o príncipe subisse até a torre, Rapunzel lançava suas longas tranças para baixo. Nessa operação, suponha que uma das extremidades da trança ficasse no ponto A e a outra no ponto C, onde se encontrava o rapaz.

Considerando que a trança ficasse esticada e perfeitamente sobreposta à linha poligonal formada pelos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, destacada em linha grossa na figura 2, o comprimento da trança de Rapunzel, em metros, é igual a

A 35.
B 38.
C 40.
D 42.
E 45.

8 Enem 2012 Nas empresas em geral, são utilizados dois tipos de copos plásticos descartáveis, ambos com a forma de troncos de cones circulares retos:

- copos pequenos, para a ingestão de café: raios das bases iguais a 2,4 cm e 1,8 cm e altura igual a 3,6 cm;
- copos grandes, para a ingestão de água: raios das bases iguais a 3,6 cm e 2,4 cm e altura igual a 8,0 cm.

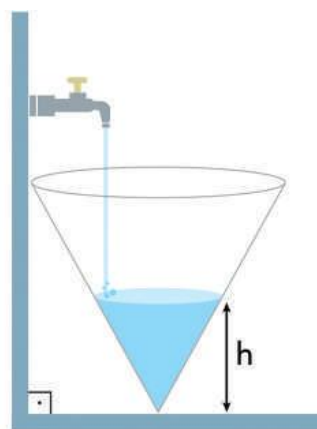
Uma dessas empresas resolve substituir os dois modelos de copos descartáveis, fornecendo para cada um de seus funcionários canecas com a forma de um cilindro circular reto de altura igual a 6 cm e raio da base de comprimento igual a *y* centímetros. Tais canecas serão usadas tanto para beber café como para beber água.

Sabe-se que o volume de um tronco de cone circular reto, cujos raios das bases são respectivamente iguais a R e r e a altura é h, é dado pela expressão:

$$V_{\text{tronco de cone}} = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + Rr)$$

O raio *y* da base dessas canecas deve ser tal que y^2 seja, no mínimo, igual a

A 2,664 cm.
B 7,412 cm.
C 12,160 cm.
D 14,824 cm.
E 19,840 cm.

9 Uerj 2015 Um recipiente com a forma de um cone circular reto de eixo vertical recebe água na razão constante de 1 cm^3/s. A altura do cone mede 24 cm, e o raio de sua base mede 3 cm. Conforme ilustra a imagem, a altura h do nível da água no recipiente varia em função do tempo t em que a torneira fica aberta. A medida de h corresponde à distância entre o vértice do cone e a superfície livre do líquido.

Admitindo $\pi \cong 3$, a equação que relaciona a altura h, em centímetros, e o tempo t, em segundos, é representada por:

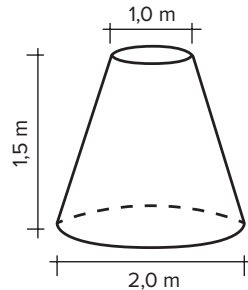
A $h = 4\sqrt[3]{t}$
B $h = 2\sqrt[3]{t}$
C $h = 2\sqrt{t}$
D $h = 4\sqrt{t}$

FRENTE 3

10 IFSul 2015 Utilize o fragmento e as imagens abaixo como auxílio para responder à questão a seguir.

Existem variados tipos de blocos de concreto para o uso de contenção às ondas marinhas, em especial o Tetrápode – bloco criado na década de 1950 e utilizado no Molhe Leste da Barra Cassino (Rio Grande – RS). Constituído em concreto maciço, o bloco é disposto de um eixo central, no qual são tangentes quatro cones alongados (patas) e arredondados, distribuídos igualmente a 120º no espaço. Essas "patas" facilitam a conexão entre os blocos, tornando a estrutura mais estável. O centro de gravidade do Tetrápode encontra-se na união das quatro "patas", o que dificulta o balanço e o rolamento da carcaça.

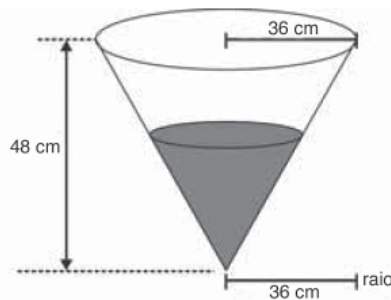
Imagens e Fragmento extraído de "Tipos de blocos de concreto para estrutura hidráulica de proteção às ondas marinhas e análise visual dos Tetrápodes da Barra de Rio Grande" (Adaptado). Disponível em: http://www.semengo.furg.br/2008/45.pdf. Acesso: 10 abr. 2015.

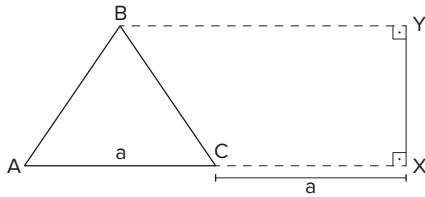
Suponha que cada "pata" do tetrápode tenha o formato a seguir.

Considere também que se gasta 10% a mais do concreto utilizado nas 4 patas para "colar" as mesmas.
Qual é o volume total de concreto, aproximado, necessário para fazer esse tetrápode? (Use $\pi = 3{,}1$).

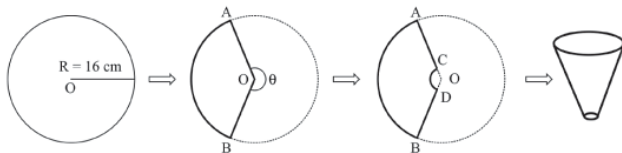
A $4\ m^3$
B $6\ m^3$
C $10\ m^3$
D $12\ m^3$

11 ESPM 2014 Uma indústria de bebidas criou um brinde para seus clientes com a forma exata da garrafa de um de seus produtos, mas com medidas reduzidas a 20% das originais. Se em cada garrafinha brinde cabem 7 ml de bebida, podemos concluir que a capacidade da garrafa original é de:

A 875 ml
B 938 ml
C 742 ml
D 693 ml
E 567 ml

12 UEL 2014 Uma empresa que produz embalagens plásticas está elaborando um recipiente de formato cônico com uma determinada capacidade, conforme o modelo a seguir.

Sabendo que o raio desse recipiente mede 36 cm e que sua altura é de 48 cm, a que distância do vértice deve ser feita uma marca na superfície lateral do recipiente para indicar a metade de sua capacidade?
Despreze a espessura do material do qual é feito o recipiente.
Apresente os cálculos realizados na resolução desta questão.

13 Esc. Naval 2014 A área da superfície de revolução gerada pela rotação do triângulo equilátero ABC em torno do eixo XY na figura abaixo, em unidade de área é

A $9\pi a^2$
B $9\sqrt{2}\pi a^2$
C $9\sqrt{3}\pi a^2$
D $6\sqrt{3}\pi a^2$
E $6\sqrt{2}\pi a^2$

14 Mackenzie 2014 Para construir um funil a partir de um disco de alumínio de centro O e raio $R = 16$ cm, retira-se do disco um setor circular de ângulo central $\theta = 225°$. Em seguida, remove-se um outro setor circular, de raio $r = 1$ cm. Para finalizar, soldam-se as bordas $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$. O processo de construção do funil está representado nas figuras abaixo.

A medida da altura do funil é

A $2\sqrt{39}$ cm
B $\frac{15\sqrt{39}}{8}$ cm
C $\frac{\sqrt{55}}{8}$ cm
D $2\sqrt{55}$ cm
E $\frac{15\sqrt{55}}{8}$ cm

15 UEM 2014 A superfície de uma piscina tem o formato de um círculo de raio 4 metros. A profundidade abaixo de cada ponto na superfície da piscina é descrita pela função

$$p(x) = \begin{cases} \frac{x+3}{3}, \text{ se } 0 \le x \le 3 \\ 3, \text{ se } 3 < x \le 4 \end{cases}$$

em que *x* é a distância, em metros, do ponto na superfície da piscina até a borda da piscina. Assinale o que for correto.

01 A profundidade da piscina em um ponto que está a 2 metros da borda é de 2,5 metros.

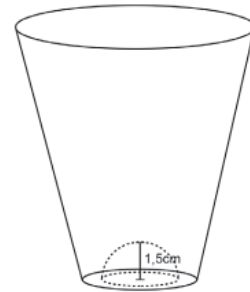
02 Uma pessoa que não deseje ir a uma parte da piscina que tenha profundidade acima de 1,5 metro pode afastar-se, no máximo, 1,5 metro da borda.

04 Se dois pontos estão a distâncias distintas da borda da piscina, então as profundidades abaixo deles também são distintas.

08 O sólido que descreve a piscina é a união de dois cilindros com um tronco de cone.

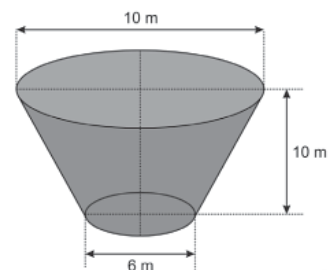
16 O volume de água que cabe dentro da piscina é 24π m^3.

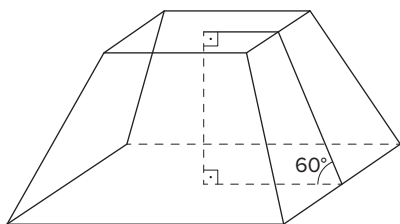
Soma:

16 UFG 2013 Uma fábrica de embalagens resolveu produzir um copo no formato de tronco de cone circular reto, com diâmetros superior e inferior de 6 cm e 4 cm, respectivamente. A parte central do fundo do copo é côncava, em formato de semiesfera, com 1,5 cm de raio, como indica a figura a seguir.

Considerando-se o exposto, desenvolva a expressão que fornece o volume do tronco de cone em função da altura e dos raios das bases e calcule a altura aproximada desse copo para que ele tenha capacidade de 157 mL.

Dados: $\pi \cong 3{,}14$, $V_{cone} = \frac{\pi R^2 H}{3}$ e $V_{esfera} = \frac{4\pi r^3}{3}$.

17 UFG 2013 Em um período de festas, pretende-se decorar um poste de uma praça com fios de luzes pisca-piscas. A estrutura da decoração possui o formato de tronco de cone circular reto com 2,4 m de altura e diâmetros de 2 m na base e 0,6 m no topo. Os fios de luzes serão esticados, do aro superior ao inferior, ao longo de geratrizes do tronco de cone e, para distribuí-los de maneira uniforme, marcam-se na circunferência da base pontos igualmente espaçados, de modo que o comprimento do arco entre dois pontos consecutivos seja no máximo 10 cm.
De acordo com os dados apresentados, determine o número mínimo de fios de luzes necessário para cobrir a superfície lateral do tronco de cone e a soma total de seus comprimentos.
Dado: $\pi \cong 3{,}14$.

18 Esc. Naval 2013 A Marinha do Brasil comprou um reservatório para armazenar combustível com o formato de um tronco de cone conforme figura abaixo. Qual é a capacidade em litros desse reservatório?

A $\frac{40}{3} \cdot 10^2 \pi$
B $\frac{19}{2} \cdot 10^5 \pi$
C $\frac{49}{3} \cdot 10\pi$
D $\frac{49}{3} \cdot 10^4 \pi$
E $\frac{19}{3} \cdot 10^3 \pi$

19 **UEL** Considere o tronco de uma pirâmide regular de bases quadradas representado na figura a seguir.

Se as diagonais das bases medem $10\sqrt{2}$ cm e $4\sqrt{2}$ cm, a área total desse tronco, em centímetros quadrados, é

A 168
B 186
C 258
D 266
E 284

20 **Udesc 2013** Se a geratriz, a altura e o raio menor de um tronco de cone reto são, respectivamente, $\sqrt{13}$ cm, 3 cm e 3 cm, então o volume do cone original é:

A 98π cm^3
B 49π cm^3
C $13{,}5\pi$ cm^3
D $62{,}5\pi$ cm^3
E 76π cm^3

Texto complementar

Fazendo miniatura de caminhão para trazer uma carga de boas recordações!

COMO É FEITO

O começo:

Quase nunca tive brinquedos comprados, então, como já devem imaginar, eu comecei a fazê-los desde muito cedo. As ferramentas de que dispunha eram um martelo, uma tesoura velha, uma faca quebrada e, nem sempre, um alicate universal. Os materiais eram diversos, dentre eles estavam a madeira, os chinelos velhos para os pneus, as latas de óleo de cozinha (se não me engano, estava escrito Zillo na lata), arame de tela e pregos. As chapas da cabine, bem como tudo o mais, eram atadas com arame fino (tirado daquelas telas de galinheiro). Como sempre, a imaginação era meu guia.

[…]

Atualmente, venho pesquisando novos materiais e, sobretudo, uma forma mais eficaz de produzir as peças, seja isso em termos de economia, rapidez e qualidade, seja pelo fato de muitas pessoas terem manifestado o desejo de ter um desses modelos. A ideia principal é a de, um dia, poder fazer essas peças sob encomenda. Funcionaria assim: alguém que quer um modelo em escala, seja como um presente para um parente ou amigo que tem ou teve um desses caminhões, ou para si mesmo, iria me mandar fotos do modelo real ou as especificações que tiver para que eu pudesse realizar o projeto o mais próximo possível do que a pessoa tem em mente. Finalmente, seria enviado pelos correios.

Muitas das perguntas que as pessoas têm feito sobre materiais, peças e como faço as miniaturas são respondidas aqui.

Pneus:

Os pneus são feitos de borracha de silicone preto. Não necessitam de pintura, a menos que se queira caracterizá-los para condições de tempo e espaço, que não sejam os de um veículo recém-fabricado. Não uso peças compradas em lojas para o protótipo e molde. As peças são todas feitas do zero. Eu os faço de massa plástica automotiva, esculpindo cada detalhe. Até usaria uma peça já moldada, mas minha escala padrão é 1:25 e não há muita coisa que se possa reaproveitar nessa escala, ao menos, não na região onde estou morando.

[…]

Cabine:

A cabine é feita de lata de massa corrida. Não tem segredo, vou medindo, recortando com uma tesoura, dobrando ou curvando e, depois, soldando as partes. […]

Projeto:

Não me baseio em *kits* ou projetos já prontos pelos motivos já citados com relação à escala que uso. Também não tenho conseguido manuais dos fabricantes do modelo em tamanho real. Restam as fotos da internet e os modelos que ainda se pode encontrar por aí. No caso das fotos da internet, preciso fazer uma vasta pesquisa para poder cruzar informações de modelos e de épocas. Quando consigo isso, delimito a unidade de medida a partir de algo que seja característica óbvia no modelo. […] Então eu passo a ter uma referência de medida, um parâmetro essencial. O resto se pode fazer por comparações. Assim, o modelo vai sendo redesenhado na escala que será usada, basta um pouco de paciência.

Quando se trata de um modelo que se possa tocar e medir, as comparações se tornam dispensáveis. Basta fazer todas as anotações e fazer a escala a partir delas. […]

Escala:

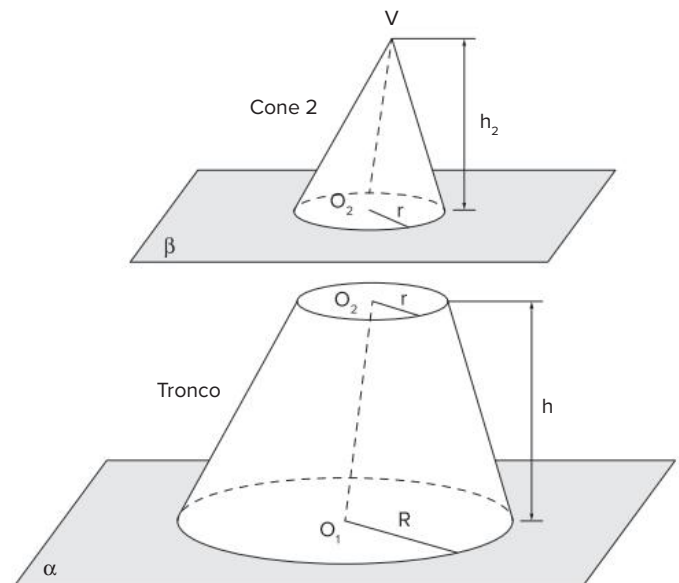
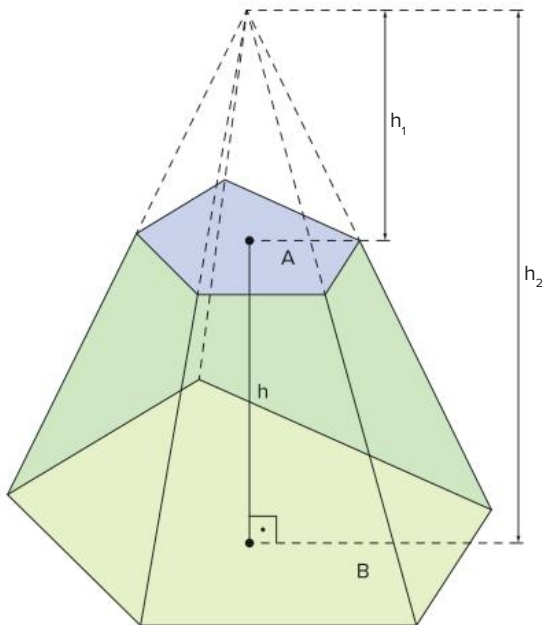
Escala é proporção entre as medidas e distâncias de um desenho, planta ou mapa geográfico e as medidas ou distâncias

reais correspondentes (dic. Michaelis). A escala que uso preferencialmente é 1:25. O que significa que a miniatura será 25 vezes menor que o objeto real usado como modelo. Então, basta dividir cada medida de uma peça ou do modelo inteiro por 25 e obter-se-á a medida a ser usada na miniatura. Na escala 1:10 será dividido por 10 e assim por diante. Depois de trabalhado o desenho no computador (muitas vezes uso o próprio Paint), a impressão deve ser feita, preferencialmente, com uma impressora a laser, já que o resultado impresso tem de ser o mais fiel possível ao desenho apresentado na tela do computador. Uma impressora a jato de tinta bem calibrada também produz bons resultados. O ponto mais crítico da impressão do modelo em escala é exatamente a obtenção das medidas correspondentes, ou seja, uma coisa é o que aparece na tela, outra coisa é o que sai da impressora. [...]

GOUVEIA, Ivan. "Fazendo miniatura de caminhão para trazer uma carga de boas recordações!". *Oficina Aberta*. Disponível em: <www.oficinaaberta.com.br/modelismo/montagem/como.asp>. Acesso em: 26 abr. 2019.

Resumindo

Sólidos semelhantes

- Razão entre comprimentos: $k = \frac{h_1}{h_2}$
- Razão entre as áreas: $k^2 = \frac{A}{B}$
- Razão entre volumes: $k^3 = \frac{V_1}{V_2}$

- Volume do tronco de pirâmide: $V = \frac{h}{3}\left(A + B + \sqrt{A \cdot B}\right)$
- Volume do tronco de cone: $V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + R \cdot r)$

Quer saber mais?

Vídeos

- IAE conta com o maior túnel de vento da América Latina <https://www.youtube.com/watch?v=bnHL3paz7GE>.
- SCBR "Making of" do modelo de túnel de vento do Embraer KC 390 <https://www.youtube.com/watch?v=fve4Sozt5-s>.
- Maquetes de edifícios conhecidos <https://www.youtube.com/watch?v=bJ-PJdNqRV0>.
- Bastidores Cinemark – Projeção do cinema <https://www.youtube.com/watch?v=Sp5jPj5vz2k>.
- Como funcionam os projetores de cinema – parte 1 <https://www.youtube.com/watch?v=qcP4a3d9UXA>.

Exercícios complementares

1 **UFF** Considere um cone equilátero de raio r e volume V. Seccionou-se esse cone a uma distância h do seu vértice por um plano paralelo à sua base; obteve-se, assim, um novo cone de volume $\frac{V}{2}$.
Expresse h em termos de r.

2 **Fuvest** As bases de um tronco de cone circular reto são círculos de raio 6 cm e 3 cm. Sabendo-se que a área lateral do tronco é igual à soma das áreas das bases, calcule:

a) a altura do tronco de cone.
b) o volume do tronco de cone.

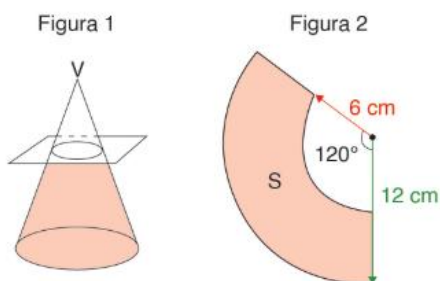
3 **UFMG** Uma pirâmide regular tem altura 6 e lado da base quadrada igual a 4. Ela deve ser cortada por um plano paralelo à base, a uma distância d dessa base, de forma que determine dois sólidos de mesmo volume. A distância d deve ser:

A $6-3\sqrt[3]{2}$
B $3-\left(3\frac{\sqrt[3]{4}}{2}\right)$
C $6-3\sqrt[3]{4}$
D $6-2\sqrt[3]{2}$

4 **UEPG 2017** Numa pirâmide quadrangular regular P_1, uma diagonal da base mede 12 cm e uma aresta lateral vale 10 cm. Essa pirâmide é seccionada por um plano paralelo a sua base, originando um tronco T e uma nova pirâmide P_2, de aresta da base igual a $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ cm. Nesse contexto, assinale o que for correto.

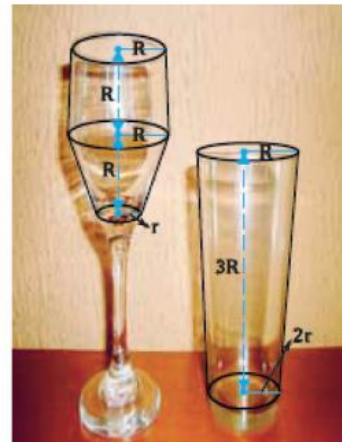
01 A aresta lateral de P_2 é menor que 3 cm.
02 A razão entre a altura de P_1 e a altura de T é 2.
04 O volume de T é igual a 189 cm^3.
08 A razão entre o volume de P_1 e o volume de P_2 é 64.
16 O volume de P_2 vale 3 cm^3.

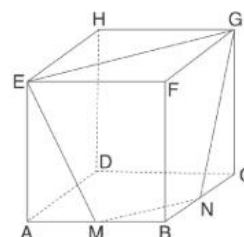
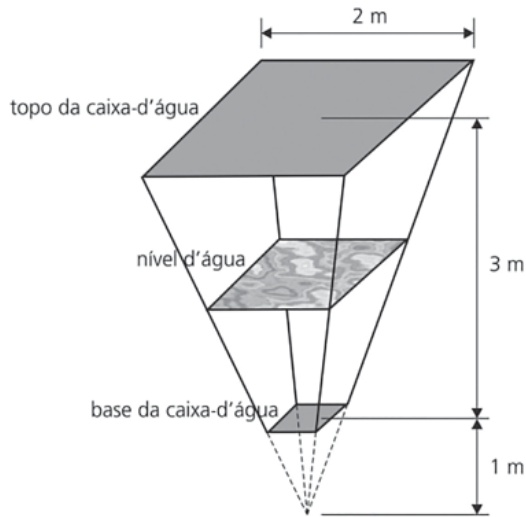
Soma:

5 **Unesp 2017** Um cone circular reto de geratriz medindo 12 cm e raio da base medindo 4 cm foi seccionado por um plano paralelo à sua base, gerando um tronco de cone, como mostra a figura 1. A figura 2 mostra a planificação da superfície lateral S desse tronco de cone, obtido após a secção.

Calcule a área e o perímetro da superfície S. Calcule o volume do tronco de cone indicado na figura 1.

6 **Uema 2016** Os copos de refrigerante de uma determinada cadeia de *fast food* têm capacidades de 300, 500 e 700 mL, respectivamente. Esses são confeccionados em material plástico no formato de tronco de cone.

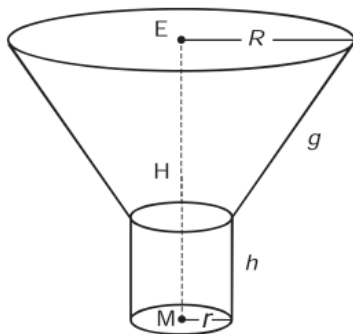
a) Supondo que todos os copos tenham as mesmas dimensões de base, quais seriam as relações entre as suas alturas?
b) Suponha que se quisesse substituir um desses copos por outro, em formato cilíndrico e de mesmo volume. Esse copo teria a mesma altura e o seu diâmetro seria o dobro da base menor do copo original. Nessas condições, qual a proporção entre os raios da base menor e da base maior do copo atual?

7 **Unesp 2014** A imagem mostra uma taça e um copo. A forma da taça é, aproximadamente, de um cilindro de altura e raio medindo R e de um tronco de cone de altura R e raios das bases medindo R e r. A forma do copo é, aproximadamente, de um tronco de cone de altura 3R e raios das bases medindo R e 2r.

Sabendo que o volume de um tronco de cone de altura h e o raio das bases B e b é $\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot h\cdot(B^2+B\cdot b+b^2)$ e dado que $\sqrt{65}\cong 8$, determine o raio aproximado da base do copo, em função de R, para que a capacidade da taça seja $\frac{2}{3}$ da capacidade do copo.

8 **Fuvest** Na figura abaixo, o cubo de vértices A, B, C, D, E, F, G, H tem lado ℓ. Os pontos M e N são pontos médios das arestas $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, respectivamente. Calcule a área da superfície do tronco de pirâmide de vértices M, B, N, E, F, G.

9 **Unicamp** Uma caixa-d'água tem o formato de um tronco de pirâmide de bases quadradas e paralelas, como mostra a figura, na qual são apresentadas as medidas referentes ao interior da caixa.

a) Qual o volume **total** da caixa-d'água?

b) Se a caixa contém $\left(\frac{13}{6}\right)$ m^3 de água, a que altura de sua base está o nível d'água?

10 **ITA 2018** A aresta lateral de uma pirâmide reta de base quadrada mede 13 cm e a área do círculo inscrito na base mede $\frac{25\pi}{2}$ cm^2. Dois planos, π_1 e π_2, paralelos à base, decompõem a pirâmide em três sólidos de mes mo volume. Determine a altura de cada um desses sólidos.

11 **UFMG 2012** Um funil é formado por um tronco de cone e um cilindro circular retos, como representado na figura abaixo.

Sabe-se que $g = 8$ cm, $R = 5$ cm, $r = 1$ cm e $h = 4\sqrt{3}$ cm. Considerando essas informações,

a) Calcule o volume do tronco de cone, ou seja, do corpo do funil.

b) Calcule o volume **total** do funil.

c) Suponha que o funil, inicialmente vazio, começa a receber água a 127 ml/s. Sabendo que a vazão do funil é de 42 ml/s, calcule quantos segundos são necessários para que o funil fique cheio.

12 **ITA 2019** Os volumes de um tronco de cone, de uma esfera de raio 5 cm e de um cilindro de altura 11 cm formam nessa ordem uma progressão aritmética. O tronco de cone é obtido por rotação de um trapézio retângulo, de altura 4 cm e bases medindo 5 cm e 9 cm, em torno de uma reta passando pelo lado de menor medida. Então, o raio da base do cilindro é, em cm, igual a

A $2\sqrt{2}$.
B $2\sqrt{3}$.
C 4.
D $2\sqrt{5}$.
E $2\sqrt{6}$.

13 **ITA 2014** Considere o sólido de revolução obtido pela rotação de um triângulo isósceles ABC em torno de uma reta paralela à base $\overline{BC}$ que dista 0,25 cm do vértice A e 0,75 cm da base $\overline{BC}$. Se o lado $\overline{AB}$ mede $\frac{\sqrt{\pi^2+1}}{2\pi}$ cm, o volume desse sólido, em cm^3, é igual a

A $\frac{9}{16}$.
B $\frac{13}{96}$.
C $\frac{7}{24}$.
D $\frac{9}{24}$.
E $\frac{11}{96}$.

14 **ITA 2012** Um cone circular reto de altura 1 cm e geratriz $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ cm é interceptado por um plano paralelo à sua base, sendo determinado, assim, um novo cone. Para que este novo cone tenha o mesmo volume de um cubo de aresta $\left(\frac{\pi}{243}\right)^{\frac{1}{3}}$ cm, é necessário que a distância do plano à base do cone original seja, em cm, igual a

A $\frac{1}{4}$.
B $\frac{1}{3}$.
C $\frac{1}{2}$.
D $\frac{2}{3}$.
E $\frac{3}{4}$.

15 **Unicamp** Uma pirâmide regular, de base quadrada, tem altura igual a 20 cm. Sobre a base dessa pirâmide constrói-se um cubo de modo que a face oposta à base do cubo corte a pirâmide em um quadrado de lado igual a 5 cm. Faça uma figura representativa dessa situação e calcule o volume do cubo.

16 **ITA** Considere uma pirâmide regular de base hexagonal, cujo apótema da base mede $\sqrt{3}$ cm. Secciona-se a pirâmide por um plano paralelo à base, obtendo-se um tronco de volume igual a 1 cm^3 e uma nova pirâmide. Dado que a razão entre as alturas das pirâmides é $\frac{1}{\sqrt{2}}$, a altura do tronco, em centímetros, é igual a

A $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.
B $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{3}$.
C $\frac{3\sqrt{3}-\sqrt{6}}{21}$.
D $\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{6}$.
E $\frac{2\sqrt{6}\quad\sqrt{2}}{22}$.

17 **ITA** Considere uma pirâmide regular com altura de $\frac{6}{\sqrt[3]{9}}$ cm. Aplique a esta pirâmide dois cortes planos e paralelos à base de tal maneira que a nova pirâmide e os dois troncos obtidos tenham, os três, o mesmo volume. A altura do tronco cuja base é a base da pirâmide original é igual a

A $2\left(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}\right)$ cm.

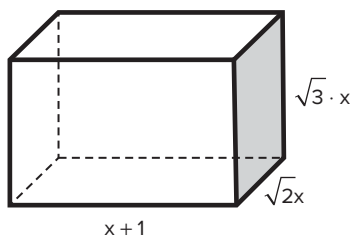
B $2\left(\sqrt[3]{6}\ \ \sqrt[3]{2}\right)$ cm.

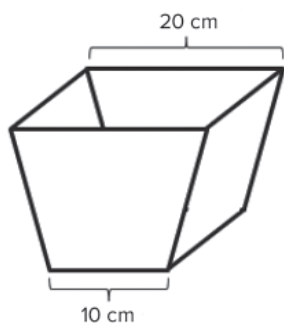
C $2\left(\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{3}\right)$ cm.

D $2\left(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}\right)$ cm.

E $2\left(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}\right)$ cm.

18 **UFSC 2016** Em relação às proposições abaixo, é CORRETO afirmar que:

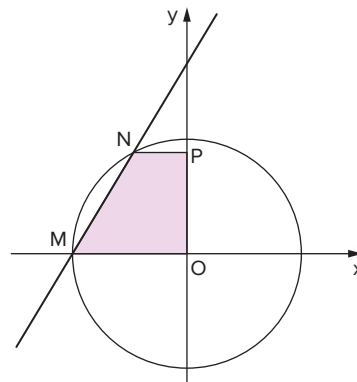
01 No paralelepípedo abaixo, a medida da sua diagonal é expressa por uma função quadrática.

02 Se um reservatório de água tem a forma de cilindro equilátero e seu diâmetro interno mede 4 m, então, considerando $\pi = 3{,}14$, a capacidade desse reservatório é de 50 240 L.

04 Um pequeno cesto de lixo tem a forma de tronco de pirâmide e suas dimensões internas estão indicadas na figura. Se a altura do cesto é 15 cm, então seu volume é 3 500 cm^3.

08 Um pote para guardar alimentos tem a forma de um prisma reto de base triangular. Sua base é um triângulo retângulo e suas dimensões formam uma progressão aritmética de razão 5 cm. Se sua altura mede 10 cm, então a área total desse prisma é 750 cm^2.

16 Um filtro de café tem a forma de um cone cuja medida interna de seu diâmetro é 20 cm. Se a medida interna da geratriz é 26 cm, então sua capacidade é menor que 2 L.

Soma:

19 **EsPCEx 2019** Na figura a seguir, a equação da circunferência é $x^2 + y^2 = 3$ e a reta suporte do segmento $\overline{MN}$ tem coeficiente angular igual a $\sqrt{3}$.

O volume do sólido gerado pela rotação do trapézio MNPO em relação ao eixo *y* é

Desenho ilustrativo fora de escala

A $\frac{3\pi}{8}$.

B $\frac{21\pi}{8}$.

C $\frac{9\pi\sqrt{3}}{8}$.

D $\frac{24\pi\sqrt{3}}{8}$.

E $\frac{63\pi\sqrt{3}}{8}$.

20 **Ufes 2015** Numa obra de construção civil, para escoar material de um andar para outro foi construído um dispositivo formado por dois recipientes, **A** e **B**. O recipiente **A**, localizado no andar superior, é uma justaposição de um tronco de pirâmide regular **T**, de altura 10 dm, com um prisma reto P, de altura 12 dm. A base inferior (base menor) de T coincide com a base superior de P, que é um quadrado de lado 3 dm. A base maior de T é um quadrado de lado 9 dm. O recipiente **B**, localizado no andar inferior, é uma caixa (prisma reto) de altura h e base retangular de lados 6 dm e 8 dm. Todas as bases estão em planos horizontais. No dispositivo, há uma pequena porta, localizada na base inferior de P, que é aberta no momento de cada escoamento. Suponha que, num determinado momento, haja uma certa quantidade de líquido no recipiente **A** e que a superfície livre desse líquido seja um quadrado de lado *a* que está a uma altura *x* da base inferior de P. Ao abrir a pequena porta, o líquido é totalmente escoado para o recipiente **B**, sem transbordar, e lá a superfície livre do líquido fica a uma altura *y* da base inferior da caixa. Desprezando a espessura das paredes do dispositivo, determine:

a) o valor de *a* e o de *y* para $x = 12$ dm;

b) o valor de h de forma que, para $x = 22$ dm, se tenha $y = h$;

c) uma expressão para *a* e uma para *y*, em função de *x*, sendo *x* entre 0 e 22 dm.

Frente 1

Capítulo 13 – Números binomiais, triângulo de Pascal e binômio de Newton

Revisando

1. $S = \{3\}$
2. $x = 2^{13} - 2$
3.
a) $4 \cdot 2^k$
b) $2^{n-1} - n$
4. $S = \{3\}$
5. $243x^5 + 405x^4y + 270x^3y^2 + 90x^2y^3 + 15xy^4 + y^5$
6. 11520

Exercícios propostos

1. Demonstração.
2.
a) $x = 2$ ou $x = 3$.
b) $x = 1$ ou $x = 3$.
c) $x = 7$
3. $n = 12$
4. B
5. B
6. A
7.
a) $\binom{13}{6}+\binom{13}{5}$
b) $\binom{41}{37}+\binom{41}{36}$
c) $\binom{5}{1}+\binom{5}{0}$
d) $\binom{16}{8}+\binom{16}{7}$
e) $\binom{n-1}{p}+\binom{n-1}{p-1}$
f) $\binom{n-3}{p+2}+\binom{n-3}{p+1}$
g) $\binom{n-1}{p-3}+\binom{n-1}{p-4}$
h) $\binom{n-p-2}{p-2}+\binom{n-p-2}{p-3}$
8.
a) $\{7\}$
b) $\{10\}$
c) $\{9\}$
d) $\{x \in \mathbb{N} \mid x \geq 3\}$
9.
a) $\binom{9}{6}$
b) $\binom{15}{14}$
c) $\binom{17}{1}$
d) $\binom{30}{9}$
e) $\binom{33}{19}$
f) $\binom{n}{n}$
g) $\binom{n}{n-p}$
h) $\binom{n}{k}$
i) $\binom{n}{p}$
j) $\binom{2n+4}{n+5}$
10.
a) $8x^3 + 12ax^2 + 6a^2x + a^3$
b) $x^3 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{16}x + \frac{1}{64}$
c) $729x^6 - 1458x^5 + 1215x^4 - 540x^3 + 135x^2 - 18x + 1$
d) $x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 80x + 32$
e) $x^7 + 7x^5 + 21x^3 + 35x + \frac{35}{x} + \frac{21}{x^3} + \frac{7}{x^5} + \frac{1}{x^7}$
f) $y^5 + \frac{5}{2}y^4x + \frac{5}{2}y^3x^2 + \frac{5}{4}y^2x^3 + \frac{5}{16}yx^4 + \frac{x^5}{32}$
g) $x^6 + 6x^5\sqrt{y} + 15x^4y + 20x^3y\sqrt{y} + 15x^2y^2 +$
$+ 6xy^2\sqrt{y} + y^3$
h) $x^4 + 8x^3y^2 + 24x^2y^4 + 32xy^6 + 16y^8$
11. C
12.
a) $-40y^2a^3$
b) $54x^4$
c) $\binom{15}{6}x^9y^6$
d) $\frac{135}{2}x^3$
13.
a) $256x^2$
b) $\binom{23}{14}x^9y^{14}$
c) $720x^3$
d) $\frac{35}{8}x^4$
14.
a) $\frac{5}{2}x^3a^3$
b) $\frac{3}{2} \cdot \frac{x^4}{y^2}$
15. Quarto termo.
16. C
17. B
18. C
19. A

Exercícios complementares

1. 1012
2. $2^{23} - 1$
3. A
4. B
5. A
6. B
7. C
8. A
9. A
10. B
11. C
12. D
13. D
14. B
15. E
16. E
17. D
18. Demonstração.
19. $\forall x \in \mathbb{R},\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$ e $n = 8$.
20.
a) $m = 17$, $n = 8$.
b) $x = 12$, $y = 5$.
c) $m = 8$, $n = 18$.
d) $m = 5$, $n = 2$.

21.

a) {6}

b) {5}

22. n = 23

23.

a) 5^{10}

b) $4^6 = 2^{12}$

c) 2^n

d) 0

e) 6^{15}

f) 12^{-5}

g) 10^8

h) 2^m (Teorema das linhas)

i) 0

24. A

25. B

Capítulo 14 – Teoria das probabilidades

Revisando

1. Ω = {(P;P;P), (P;P;B), (P;B;P), (B;P;P), (P;B;B), (B;P;B), (B;B;P), (B;B;B)}

2. $n(\Omega) = C_{5;2} = 10$
   Ω = {(A;B); (A;C); (A;D); (A;E); (B;C); (B;D); (B;E); (C;D); (C;E); (D;E)}

3. p = 0,3

4. $P(A) = \frac{30}{210} = \frac{1}{7}$

5.

a) $P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

b) $P(B) = \frac{11}{36}$
   Os eventos não são independentes.

Exercícios propostos

1.

a) A = {(2;6); (3;5); (4;4); (5;3); (6;2)}

b) B = {(1;1); (2;2); (3;3); (4;4); (5;5); 6;6)}

c) C = {(1;2); (2;1); (2;4); (4;2); (3;6); (6;3)}

d) $D = \varnothing$

2.

a) A = {1; 3; 5}

b) B = {1; 2}

c) $C = \varnothing$

d) D = {2; 4; 6}

3.

a) A = {(1;1); (1;2); (1;3); (2;1); (2;2); (3;1)}

b) B = {(1;1); (1;3); (1;5); (2;2); (2;4); (2;6); (3;1); (3;3); (3;5); (4;2); (4;4); (4;6); (5;1); (5;3); (5;5); (6;2); (6;4); (6;6)}

c) C = {(1;2); (1;4); (1;6); (2;1); (2;3); (2;5); (3;2); (3;4); (3;6); (4;1); (4;3); (4;5); (5;2); (5;4); (5;6); (6;1); (6;3); (6;5)}

d) $A \cap B$ = {(1;1); (1;3); (2;2); (3;1)}

e) $A \cup B$ = {(1;1); (1;2); (1;3); (2;1); (2;2); (3;1); (1;5); (2;4); (2;6); (3;3); (3;5); (4;2); (4;4); (4;6); (5;1); (5;3); (5;5); (6;2); (6;4); (6;6)}

f) $\bar{A}$ = {(1;5); (1;6); (2;3); (2;4); (2;5); (2;6); (3;2); (3;3); (3;4); (3;5); (3;6); (4;1); (4;2); (4;3); (4;4); (4;5); (4;6); (5;1); (5;2); (5;3); (5;4); (5;5); (5;6); (6;1); (6;2); (6;3); (6;4); (6;5); (6;6)}

g) $\bar{B}$ = {(1;2); (1;4); (1;6); (2;1); (2;3); (2;5); (3;2); (3;4); (3;6); (4;1); (4;3); (4;5); (5;2); (5;4); (5;6); (6;1); (6;3); (6;5)}

h) $\bar{A} \cap B$ = {(1;5); (2;4); (2;6); (3;3); (3;5); (4;2); (4;4); (4;6); (5;1); (5;3); (5;5); (6;2); (6;4); (6;6)}

i) $\bar{A} \cap \bar{B}$ = {(1;4); (1;6); (2;3); (2;5); (3;2); (3;4); (3;6); (4;1); (4;3); (4;5); (5;2); (5;4); (5;6); (6;1); (6;3); (6;5)}

j) $A \cap \bar{A} = \varnothing$

k) $A \cup \bar{A}$ = {(1;1); (1;2); (1;3); (1;4); (1;5); (1;6); (2;1); (2;2); (2;3); (2;4); (2;5); (2;6); (3;1); (3;2); (3;3); (3;4); (3;5); (3;6); (4;1); (4;2); (4;3); (4;4); (4;5); (4;6); (5;1); (5;2); (5;3); (5;4); (5;5); (5;6); (6;1); (6;2); (6;3); (6;4); (6;5); (6;6)} ou $A \cup \bar{A} = S$

l) $\overline{A \cap B}$ = {(1;2); (1;4); (1;5); (1;6); (2;1); (2;3); (2;4); (2;5); (2;6); (3;2); (3;3); (3;4); (3;5); (3;6); (4;1); (4;2); (4;3); (4;4); (4;5); (4;6); (5;1); (5;2); (5;3); (5;4); (5;5); (5;6); (6;1); (6;2); (6;3); (6;4); (6;5); (6;6)}

4.

a) A = {(C; K); (C; C); (K; C)}

b) B = {(C; K); (K; C); (K; K)}

c) $A \cap B$ = {(C; K); (K; C)}

d) C = {(K; K)}

5. A

6. Soma = 01 + 02 + 04 + 08 = 15

7. $\frac{7}{25}$

8. D

9. D

10. A

11. D

12. A

13.

a) $\frac{1}{16}$

b) $\frac{15}{16}$

c) $\frac{11}{16}$

d) $\frac{3}{8}$

e) $\frac{1}{4}$

14.

a) $\frac{3}{7}$

b) $\frac{4}{7}$

15. C

16. C

17. D

18.

a) $\frac{11}{36}$

b) $\frac{13}{75}$

19. C

20.

a) 12 870

b) $\frac{28}{65}$

c) 85

21. D

22. A

23. C

24. $\frac{7}{36}$

25. $P(\bar{A}) = \frac{4}{5}$; $P(\bar{B}) = \frac{1}{3}$

26.

a) $\frac{1}{4}$

b) $\frac{1}{6}$

c) $\frac{1}{24}$

d) $\frac{1}{3}$

e) $\frac{23}{24}$

27.

a) $\frac{35}{132}$

b) $\frac{7}{264}$

c) $\frac{7}{264}$

d) $\frac{257}{264}$

28. $\frac{7}{15}$

29.
a) $\frac{33}{100}$
b) Não.
c) Não.

30. $\frac{22}{25} = 88\%$

31. $\frac{17}{36}$

32.
a) $\frac{7}{15}$
b) $\frac{1}{3}$

33. A

34. C

35. $\frac{3}{4}$

36. $\frac{3}{7}$

37. 80%

38.
a) $\frac{3}{20}$
b) $\frac{1}{4}$
c) $\frac{17}{20}$
d) $\frac{3}{4}$
e) $\frac{2}{5}$

39.
a) $\frac{12}{35}$
b) $\frac{23}{35}$

40. $P(E) = \frac{3}{13}; P(\bar{E}) = \frac{10}{13}$

41.
a) $\frac{2}{3}$
b) $\frac{2}{3}$
c) $\frac{1}{3}$

42. $\frac{3}{4}$

43. $\frac{2}{5}$

44. $\frac{1}{3}$

45.
a) $\frac{1}{13}$
b) $\frac{3}{13}$

46. $\frac{1}{3}$

47.
a) $\frac{1}{2}$
b) $\frac{4}{9}$
c) $\frac{1}{3}$

48. $\frac{2}{5}$

49. $\frac{1}{3}$

50. $\frac{1}{221}$

51. $\frac{1}{3}$

52. $\frac{7}{40}$

53. $\frac{1}{6}$

54. $\frac{5}{18}$

55. $\frac{1}{8}$

56. C

57. D

58. A

59. B

60. A

61. A

62. C

63. D

64. C

65.
a) {(A;B;C), (A;C;B), (B;A;C), (B;C;A), (C;A;B), (C;B;A)}
b) $\{2_e; 2_c; 2_o; 2_p; ...; 10_e; 10_c; 10_o; 10_p; A_e; A_c; A_o; A_p; Q_e; Q_c; Q_o; Q_p; K_e; K_c; K_o; K_p; J_e; J_c; J_o; J_p\}$

$$\begin{cases} e: \text{espada} \\ c: \text{copas} \\ o: \text{ouros} \\ p: \text{paus} \end{cases}$$

c) {(MMM); (MMF); (MFM); (FMM); (FFF); (FFM); (FMF); (MFF)}
d) {(A;B); (A;C); (A;D); (A;E); (B;C);(B;D); (B;E); (C;D); (C;E); (D;E)}

66.
a) {2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; 16; 18; 20; 22; 24; 26; 28; 30}
b) {1; 3; 5; 7; 11; 13; 15; 17; 19; 21; 23; 25; 27; 29}
c) {2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29}
d) {17; 18; 19; 20; 21; 22; 23; 24; 25; 26; 27; 28; 29; 30}
e) {10; 20; 30}
f) {3; 6; 8; 9; 12; 15; 16; 18; 21; 24; 27; 30}
g) Espaço amostral – {6; 12; 18; 24; 30}

67.
a) A = {(k;1), (k;2), (k;3), (k;4), (k;5), (k;6)}
b) B = {(k;2), (k;4), (k;6), (c;2), (c;4), (c;6)}
c) C = {(k;3), (c;3)}
d) $A \cup B$ = {(k;1), (k;2), (k;3), (k;4), (k;5), (k;6), (c;2), (c;4), (c;6)}
e) $B \cap C$ = { }; B e C são mutuamente exclusivos.
f) $A \cap C$ = {(k;3)}
g) $\bar{A}$ = {(c;1), (c;2), (c;3), (c;4), (c;5), (c;6)}
h) $\bar{C} = E - C$

68.
a) $\frac{1}{52}$
b) $\frac{1}{13}$
c) $\frac{1}{4}$
d) $\frac{3}{13}$
e) $\frac{12}{13}$

69.
a) $\frac{4}{9}$
b) $\frac{4}{9}$
c) $\frac{1}{3}$

70.
a) 0,4
b) 0,7
c) 0,6

71.
a) $\frac{1}{8}$
b) $\frac{3}{8}$
c) $\frac{7}{8}$
d) $\frac{1}{8}$
e) $\frac{7}{8}$

72.
a) $\frac{1}{4}$
b) $\frac{3}{4}$

73.
a) $\frac{1}{4}$
b) $\frac{49}{100}$
c) $\frac{16}{25}$

74. $\frac{2}{3}$

75. E

76. B

77.
a) $\frac{1}{50}$
b) $\frac{7}{50}$
c) $\frac{7}{25}$
d) $\frac{14}{25}$
e) $\frac{11}{25}$

78.
a) $\frac{2}{5}$
b) $\frac{3}{5}$

79. C

80. $\frac{22}{425}$

81. $\frac{13}{17}$

82.
a) $\frac{C_{180,10}}{C_{200,10}}$
b) $\frac{C_{20,10}}{C_{200,10}}$
c) $\frac{C_{180,5} \cdot C_{20,5}}{C_{200,10}}$

83.
a) $\frac{C_{50,5}}{C_{60,5}}$
b) $\frac{C_{10,5}}{C_{60,5}}$
c) $\frac{C_{50,2}C_{10,3}}{C_{60,5}}$
d) $1-\frac{C_{50,5}}{C_{60,5}}$

84.
a) $\frac{3}{10}$
b) $\frac{1}{5}$
c) $\frac{1}{2}$

85.
a) $\frac{1}{6}$
b) $\frac{5}{6}$
c) $\frac{1}{6}$
d) $\frac{1}{36}$
e) 1
f) $\frac{11}{36}$

86.
a) $\frac{7}{100}$
b) $\frac{1}{10}$
c) $\frac{1}{10}$

87. $\frac{1}{12}$

88. $\frac{1}{3}$

89.
a) $\frac{48}{C_{52,5}}$
b) $\frac{C_{48,5}}{C_{52,5}}$
c) $1-\frac{C_{48,5}}{C_{52,5}}$

90.
a) $\frac{4}{7}$
b) $\frac{11}{21}$

91. $\frac{15}{128}$

Exercícios complementares

1. E
2. E
3. E
4. $\frac{6}{7}$
5. D
6. E
7. C
8. E
9. C
10.
a) $\frac{1}{3}$
b) $\frac{2}{9}$
11. C
12. D
13. C
14. D
15.
a) 220
b) 185
c) $\frac{37}{44}$
16. A
17. D
18. D
19. I) Falsa; II) Verdadeira
20. C
21. $\frac{5}{16}$
22. C
23. B
24. B
25.
a) $\frac{10}{21}$
b) 9 azuis e 12 brancas.
c) $B = \{2, 3, 4, 5\}$
26. C
27.
a) 9
b) $p_1 = \frac{12}{25}$; $p_2 = \frac{6}{25}$; $p_3 = \frac{4}{25}$; $p_4 = \frac{3}{25}$
28. E
29. B
30. B

31.

a) $\frac{2}{5}$

b) $\frac{2}{5}$

c) 0

32. B

33.

a) $\frac{1}{10}$

b) $\frac{9}{10}$

c) $\frac{3}{10}$

34. D

35. $\frac{2}{5}$

36. $\frac{3}{8}$

37.

a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{4}$

38.

a) $\frac{1}{4}$

b) $\frac{3}{4}$

39.

a) $\frac{1}{4}$

b) $\frac{3}{16}$

40. 73%

41. C

42. E

43. C

44. A

45.

a) Ímpar, porque existem mais etiquetas ímpares.

b) $\frac{2}{25}$

46. B

47. C

48. D

49. C

50. D

51. C

52. E

53. B

54. A

55. C

56.

I. B

II. C

57. C

58. $P(\bar{A}) = \frac{9}{10}$

59. E

60. C

61. A

62. C

63. C

64. A

65. D

66. E

67. D

68. B

Frente 2

Capítulo 9 – Polinômios

Revisando

1.

a) $gr(P) = 5$

b) $P(0) = 18$

c) (3, 0, 2, 5, 2, 18)

d) $P(1) = 30$

e) $P(i) = 13 + 3i$

2. $m \neq 0$ e $m \neq 2 \rightarrow 4^{\underline{o}}$ grau
$m = 0 \rightarrow 2^{\underline{o}}$ grau
$m = 2 \rightarrow 3^{\underline{o}}$ grau

3.

a) $A(0) = -24$

b) $B(0) = -24$

c) $A(1) = -6$

d) $B(1) = -6$

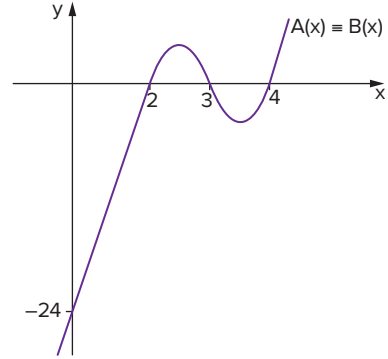
e) $x \in \{2, 3, 4\}$

f) $A(-1) = -60$; $B(-1) = -60$; $A(10) = 336$; $B(10) = 336$

g) $A(x) \equiv B(x)$

h) $A(i) = B(i) = -15 + 25i$

i) $S = \{2, 3, 4\}$

j)

k) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 3 \text{ ou } x > 4\}$

4. $P(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 3x$

5. B

6.

a) $A(x) = -4x^2 - x + 11$

b) $B(x) = x^4 - 3x^3 + 8x^2 - 2x - 14$

c) $C(x) = 3x^5 - 20x^4 + 43x^3 - 56x^2 + 34x - 12$

d) $D(x) = 8x^3 - 17x^2 - 3x + 12$

7.

$$\begin{array}{l|l} x^5 - 6x^4 + 14x^3 - 23x^2 + 19x - 15 & -x^3 + 4x^2 + 3x + 8 \\ \hline -x^5 + 4x^4 + 3x^3 + 8x^2 & x^2 + 2x \quad 9 \\ \hline 2x^4 + 17x^3 - 15x^2 + 19x \quad 15 & \\ +2x^4 \quad 8x^3 \quad 6x^2 \quad 16x & \\ \hline +9x^3 - 21x^2 + 3x \quad 15 & \\ -9x^3 + 36x^2 + 27x + 72 & \\ \hline +15x^2 + 30x + 57 & \end{array}$$

8.

a) $Q(x) = x^2 + 6x + 10$ e $r = 15$.

b) $Q(x) = x^2 + 3x - 5$ e $r = 0$.

c) $Q(x) = x^2 + 4x - 2$ e $r = -5$

d) $Q(x) = x^2 + (4 + i)x + (-3 + 4i)$ e $r = -9 - 3i$.

9. $n = 1$ e $m = -3$

10.

a) $R(x) = -x + 3$

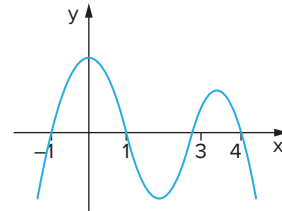
b) $Q(0) = \frac{5}{2}$

Exercícios propostos

1. C	5. D	9. A	13. C	17. D	21. A
2. C	6. A	10. D	14. C	18. C	22. C
3. A	7. B	11. B	15. D	19. A	23. C
4. B	8. B	12. C	16. E	20. E	24. E

25. E
26. E
27. E
28. E
29. B
30. D
31. D
32. D
33. D
34. C
35. D
36. B
37. A
38. B
39. D
40. B
41. B
42. E
43. C
44. A
45. $k = 4$
46. D
47. C
48. A
49. C
50. C
51. C
52. A
53. D
54. D
55. B
56. B
57. A
58. B
59. B
60. B
61. B
62. A
63. C
64. D
65. E
66. C
67. A
68. A
69. B
70. B
71. E
72. B
73. A
74. B
75. B
76. B
77. D
78. D
79. D
80. 4

Exercícios complementares

1. 34 unidades.
2. $a = -2$ e $b = 5$.
3. $r = 30$
4. $p = 19$
5. $a + b + k = 2$
6. $a + b = 4$
7. $R(x) = 4x + 3$
8.
a) 10
b) $-\sqrt{5}, 2, \sqrt{5}$
9.
a) $z = 0$ ou $z = \pm 2i$.
b) $k = -\frac{3}{2}$ e $r(x) = \frac{19}{2}x + \frac{1}{2}$.
10. $-4 < m < 4$
11.
a) 4
b) $y = \frac{2}{3}x + 2$
c) $p(x) = -\frac{1}{3}(x + 3)(x - 1)(x - 4)$
12.
a) $f(x) = \frac{1}{4}(x - 2)(x^2 - 9)$
b) $]-3, 2[\cup]3, +\infty[$
13.
a) $f(x) = x^3(x - 2)$
b) $[0, 1[$
14. $-i, i, 2 - i, 2 + i$
15.
a) $B = -3$
b) $]-1, 1[\cup]3, +\infty[$
16. 20 m.
17. $D_f =]-2, +\infty[- \{1\}$
18. $r = -\frac{101}{32}$
19. $P(x) = x^4 + 2$
20.
a) Demonstração.
b) $a = 0$ e $b = -8$.
21. $a = -76{,}8$ e $b = 89{,}6$.
22. $a = -1$ e $b = 3$.
23.
a) Demonstração.
b) $q \in \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$
24. $a^2 + b^2 + c^2 = 14$
25. $A + B + 2C = 2$
26.
a) $x^4 - 81$
b) -65
27. D
28. E
29. B
30. D
31. B
32. D
33. B
34. D
35. C
36. B
37. D
38. $a = 3$ e $b = 3$.
39. C
40. E
41. E
42. F; V; V; F; V
43. C
44. D
45. A
46.
a) 6 paralelepípedos.
b) 345
47.
a) 2 é raiz.
b) Demonstração.
c) Demonstração.
48. $x = \frac{7 - \sqrt{37}}{3}$
49. $r(x) = \frac{3x + 11}{4}$
50.

51. $m(t) = -t + 10$
52. $A = B = C = 1$
53. B
54. D
55. D
56. A
57. B
58.
a) $a = -2\sqrt{3}$ e $b = -1$.
b) $S = \left\{\sqrt{3} + \sqrt{2}; \sqrt{3} - \sqrt{2}; \frac{1 + \sqrt{7}\,i}{2}; \frac{1 - \sqrt{7}\,i}{2}\right\}$
59.
a) 10
b) $\{2x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 1, x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1, x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 2\}$
60. A
61. B
62. B
63. A
64. $a + b + c = 2$
65. B
66. A
67. D

68.

a) 0 e –1

b) $\binom{2014}{1006}$

69. D

70. E

71. $P(x) = 10x^3 + 6x^2 + 3x + 1$

72. C

73. C

74. E

75. 781

76. B

77. B

78. A

79. E

80. E

Capítulo 10 – Equações polinomiais

Revisando

1.

a) $x(x-1)^3(x+1)(x+3)^2 = 0$

b) $S = \{-3, -1, 0, 1\}$

c) $x = 1$ é raiz tripla $\rightarrow m_1 = 3$
$x = -3$ é raiz dupla $\rightarrow m_2 = 2$
$x = -1$ é raiz simples $\rightarrow m_3 = 1$
$x = 0$ é raiz simples $\rightarrow m_4 = 1$

d) 7º grau.

2. $S = \left\{-3, -i\sqrt{2}, i\sqrt{2}, 3\right\}$

3. $S = \{-1 + i, -1 - i, 4\}$

4. $S = \{-2, -1, 5\}$

5.

a) Não possui raízes inteiras.

b) $\frac{1}{3}$

c) $\frac{1}{3}$, $1 + i$ e $1 - i$.

6. C

7. E

8.

a) $\frac{4}{5}$

b) $-\frac{3}{5}$

c) $-\frac{2}{5}$

d) $\frac{3}{2}$

e) $\frac{46}{25}$

9. D

10. $a + b + c = 45$

Exercícios Propostos

1. C
2. B
3. D
4. D
5. A
6. C
7. B
8. C
9. C
10. C
11. C
12. A
13. D
14. A
15. B
16. D
17. B
18. B
19. B
20. C
21. A
22. Soma: 01 + 02 + 08 = 11
23. B
24. D
25. B
26. C
27. A
28. C
29. C
30. A
31. E
32. D
33. B
34. C
35. B
36. D
37. E
38. A
39. E
40. A

Exercícios complementares

1.

a) $k = 60$

b) $S = \{-4, 3, 5\}$

2.

a) $k = -14$

b) $S = \left\{-3 - \sqrt{2}, -3 + \sqrt{2}, 2\right\}$

3.

a) $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

b) $S = \left\{\frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \frac{-1 - i\sqrt{7}}{2}, \frac{-1 + i\sqrt{7}}{2}\right\}$

4. $]1, 6[- \{2\}$

5. –3, –2 e 5.

6. D

7.

a) $\frac{A_t}{V} = 14$

b) $\frac{1}{3}$, $2 - \sqrt{3}$ e $2 + \sqrt{3}$.

8.

a) 2, 4 e 8.

b) $k = 56$

9.

a) 20%

b) –3,2

10.

a) altura 1 e volume 80.

b) $5 - \sqrt{5}$

c) $5 - \sqrt{5}$

11.

a) 1 e –2

b) $|z| = \sqrt{13}$

12.

a) $P(2) \cdot P(3) < 0$

b) Irracionais.

13.

a) $V(x) = x(20 - 2x)(16 - 2x)$

b) $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 4\}$

14. C

15. C

16. C

17. E

18.

a) $\alpha = \beta = 0$ ou
$\alpha \geq -\frac{1}{4}$ e $\beta = \frac{-3\alpha \pm \alpha\sqrt{1 + 4\alpha}}{2}$.

b) $S = \{-1, 0\ 1\}$ ou
$S = \left\{\frac{-\alpha - \beta}{\alpha}; \frac{\alpha + \beta \pm \sqrt{\alpha^2 - 6\alpha\beta - 3\beta^2}}{2\alpha}\right\}$.

19. A

20. B

21.

a) $\beta \in \{\pm 15\}$

b) $\left\{\frac{5}{6}; \frac{-5}{6} \pm i\frac{\sqrt{11}}{6}\right\}$ ou $\left\{\frac{-5}{6}; \frac{5}{6} \pm i\frac{\sqrt{11}}{6}\right\}$.

22. C

23.

a) Demonstração.

b) $S = \left\{-2+\sqrt{3};\ -2-\sqrt{3}; \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

24. D

25. B

26. E

27. 4

28. $a = 1$, $b = 2$, $1 \pm i\sqrt{5}$.

29. D

30. C

31. E

32. D

33. A

34. B

35. $S = \{3; \sqrt{2}+i\sqrt{7}; \sqrt{2}-i\sqrt{7}; -\sqrt{2}-i\sqrt{7};$
$\sqrt{\ } + i\sqrt{7}$

36. A

37. B

38. $S = \left]-2, \frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right[\cup \left]\frac{1+\sqrt{3}}{2}, 2\right[$

39. B

40. C

Frente 3

Capítulo 14 – Cilindros

Revisando

1. E
2. A
3. D
4. B
5. C
6. C
7. C
8. E
9. D
10. A

Exercícios propostos

1. A
2. E
3. D
4. E
5. D
6. 20,096 litros.
7. C
8. B
9. 58 caminhões.
10. A
11. A
12.
a) $V = 600\pi\ cm^3$
b) $V = 300\ m^3$
13.
a) $V_{lata} = \pi r^2 h$ e $V_{copo} = \frac{\pi r^2 h}{9}$
b) 9 copos.
14. E
15. D
16.
a) $b = 376{,}80$ cm
b) $h \cong 132{,}70$ cm
17. Soma: 16
18. C
19. A
20. D

Exercícios complementares

1.
a) $x = 9$ cm e $y = 3$ cm
b) $x = 15$ cm e $y = 5$ cm
2. D
3. $\frac{d}{2}$
4. E
5. A
6. C
7. $R = 3$ cm e $r = 2$ cm
8. B
9.
a) $S = 8\pi + 1000\ cm^2$
b) $d = 1 + \sqrt{17}$ cm
10. B
11.
a) $V = \pi x_0^2 (1 - x_0^2)$
b) $V = \frac{20\pi}{81}$
c) $V = \frac{\pi}{4}$
12.
a) 6250 litros.
b) 0,5 m
13. $S_T = (\pi + \sqrt{2} - 1)$ u.a.
14. $V = 80800\ m^3$
15. Soma: 01 + 02 + 04 = 07
16. B
17. A
18. $V = \frac{1}{2}\pi r^2 (a+b)$
19. E
20. B

Capítulo 15 – Cones e esferas

Revisando

1. D
2. A
3. E

4. C
5. B
6. E
7. D
8. $A_{cilindro} = 216\pi\ cm^2$,
$A_{cone} = 36\pi\left(1+\sqrt{5}\right)\ cm^2$
e $A_{esfera} = 144\pi\ cm^2$.
9. B
10. D
11. E
12. E
13.
a) $A_{total} = 126\pi\ cm^2$
b) $\frac{2}{3}$
14. $V_{pedaço} = 4\,500\pi\ cm^3$ e $A_{pedaço} = 1125\pi\ cm^2$.
15. A

Exercícios propostos

1. E
2. E
3. B
4. C
5. A
6. C
7. D
8. B
9. D
10. A
11. E
12. $\frac{A_{lateral\ do\ cone}}{A_{lateral\ do\ cilindro}} = \frac{1}{2}$
13. $V_B = 218$ mL
14. C
15. E
16. B
17. B
18. C
19. D
20. E
21. A
22. E
23. C
24. E
25. B
26. B
27. C
28. A
29. B
30. C
31. B
32. E
33. C
34. A
35. D
36. B
37. A
38. D
39. D
40. B
41. D
42. E
43.
a) $\beta = 60^o$
b) $n_{B'} = 0,8\sqrt{3}$
44. D
45. A
46. B
47. A
48. D
49. D
50. C
51. C
52. D
53. C
54. B
55. D
56.
a) h = 2 cm
b) R = 4 cm
57. E

Exercícios complementares

1. R = 15, h = 20 e g = 25.
2. $V \cong 4710$
3. $A_{total} \cong 1884$
4. $\theta = 216°$
5. D
6. D
7. B
8. D
9. A
10. B
11. D
12. h = 9,6 cm
13. A
14. D
15. E
16. A
17. Bola.
18. A
19. C
20. D
21. C
22. E
23.
a) $1,09 \times 10^{-7}$ mm
b) $\alpha = 109,5°$
24. $V = 360\pi\ cm^3$
25. $A = 240\pi\ cm^2$
26. C
27. E
28. E
29. A
30. D
31. C
32. D
33. B
34. D
35. $x = \left(\frac{4\sqrt{7}-7}{9}\right)h$
36. B
37. $V = \frac{\sqrt{6}\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)^3}{4}$
38. C
39. $R\left(\sqrt{5}+1\right)$
40. A
41. E
42. $A_{setor\ circular} = \frac{8\pi}{3}\ cm^2$
43.

a) $O_1O_2 = \frac{5}{2}$ cm

b) $A_{total} = \frac{17\pi}{5}$ cm^2

44. A
45. $V = \frac{4(6-\pi)}{3}$ cm^3
46. C
47. E
48. C
49. $V = \frac{2\sqrt{2}R^3\left(1+\sqrt{6}\right)^3}{3}$
50. $h = \sqrt{\frac{S \cdot (m-1)}{\pi}}$
51.

a) $\frac{a\sqrt{6}}{4}$

b) $\frac{a\left(3-\sqrt{3}\right)}{4}$

52. $2a = R\left(3-\sqrt{3}\right)$
53. $S = \frac{\pi a^2\sqrt{6}}{18}$
54. A
55. E
56. O círculo base da calota é o círculo máximo da esfera (r = R).
57. $S = 4\pi rr^*$
58.

a) $V = \frac{\pi\sqrt{2}a^3}{24}$

b) $V = \frac{\pi\sqrt{2}a^3}{3} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{9} - \frac{1}{8}\right)$

59. $\alpha = \arccos\left(\frac{4}{5}\right)$

Capítulo 16 – Troncos

Revisando

1. D
2. E
3. B
4. 9 frascos.
5. $V \cong 667{,}8$ dm^3

Exercícios propostos

1. D
2. C
3. E
4. B
5. C
6. C
7. A
8. C
9. A
10. D
11. A
12. $g = 30\sqrt[3]{4}$ cm
13. A
14. E
15. Soma: 02 + 08 + 16 = 26
16. h = 8,25 cm
17. 63 fios; 157,5 m.
18. D
19. E
20. D

Exercícios complementares

1. $h = \frac{r\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}$
2.

a) h = 4 cm

b) 84π cm^3

3. C
4. Soma: 01 + 04 + 08 + 16 = 29
5. $S = 36\pi$ cm^2, $P = 12(\pi + 1)$ cm e

$V = \frac{112\pi\sqrt{2}}{3}$ cm^3.

6.

a) $h_1 = \frac{3}{7}h_3$ e $h_2 = \frac{5}{7}h_3$.

b) $\frac{r}{R} = \frac{1+3\sqrt{5}}{22}$

7. $2r = \frac{5R}{7}$
8. $S = \frac{13\ell^2}{4}$
9.

a) $V_{total} = \frac{21}{4}$ m^3

b) h = 2 m

10. $\frac{12}{\sqrt[3]{3}}$ cm; $\frac{\sqrt[3]{2}-1}{\sqrt[3]{3}} \cdot 12$ cm e $\frac{\left(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}\right)}{\sqrt[3]{3}} \cdot 12$ cm.
11.

a) $V_{tronco} = \frac{124\pi\sqrt{3}}{3}$ cm^3

b) $V_{funil} = \frac{136\pi\sqrt{3}}{3}$ cm^3

c) 2,9 segundos.

12. B
13. C
14. D
15. 1000 cm^3
16. C
17. D
18. Soma: 02 + 04 = 06
19. B
20.

a) a = 3 dm e $y = \frac{9}{4}$ dm

b) $h = \frac{83}{8}$ dm

c) $a = \begin{cases} 3, \text{ se } 0 \le x \le 12 \\ \frac{3}{5}(x-7), \text{ se } 12 \le x \le 22 \end{cases}$

$y = \begin{cases} \frac{3}{16}x, \text{ se } 0 \le x \le 12 \\ \frac{1}{400}(x^3 - 21x^2 + 147x + 432), \text{ se } 12 \le x \le 22 \end{cases}$